

DIFRACCION

23.1 *Introducción*

23.2 *Difracción de Fraunhofer por una rendija rectangular*

23.3 *Difracción de Fraunhofer por una abertura circular*

23.4 *Difracción de Fraunhofer por dos rendijas paralelas iguales*

23.5 *Redes de difracción*

23.6 *Difracción de Fresnel*

23.7 *Difusión de ondas*

23.8 *Difusión de rayos X por cristales*

23.1 Introducción

Con el nombre genérico de *difracción* se conoce otro tipo de fenómeno característico del movimiento ondulatorio. La difracción se observa cuando se distorsiona una onda por un obstáculo cuyas dimensiones son comparables a la longitud de onda de aquélla. El obstáculo puede ser una pantalla con una abertura pequeña o una rendija que sólo permite el paso de una pequeña porción del frente de onda incidente. El obstáculo puede ser también un pequeño objeto, tal como un alambre o un disco, que impide el paso de una pequeña porción del frente de onda.

Si un haz de partículas incide sobre una pantalla que tiene una abertura pequeña, solamente las que inciden en la abertura son transmitidas y continúan su movimiento sin ser perturbadas (fig. 23-1). Las otras se detienen o rebotan hacia atrás. Inversamente, si se coloca un objeto en un haz de partículas, el objeto impedirá el paso de aquéllas que inciden sobre el haz, mientras que las restantes continuarán su movimiento sin perturbación. Por el contrario, sabemos por experiencia diaria, especialmente en el caso de ondas sonoras y de ondas superficiales en el

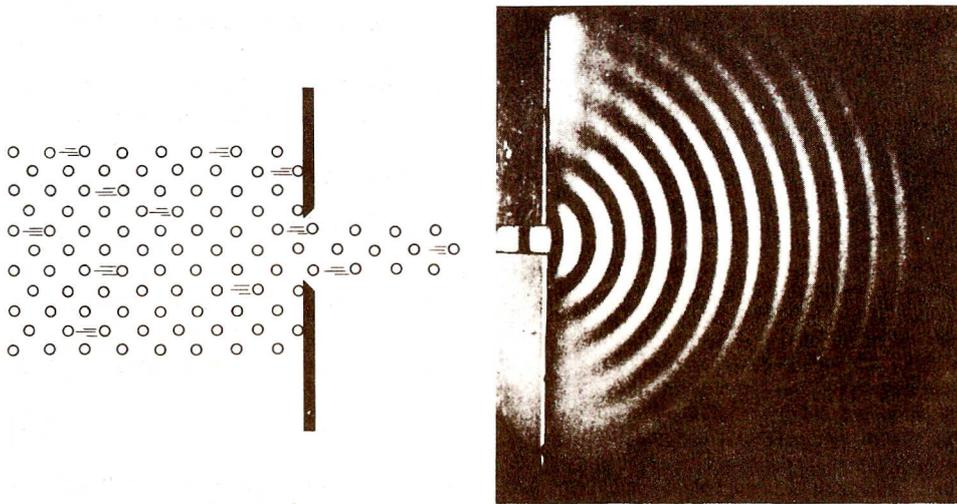


Fig. 23-1. Comportamiento de un chorro de partículas que incide sobre una pantalla que tiene una pequeña abertura.

agua, que las ondas se comportan de manera diferente y que se extienden alrededor de los obstáculos interpuestos en su camino, como se ilustra en la fig. 23-2. Este efecto se hace más y más notable a medida que las dimensiones de la rendijas o el tamaño de los objetos se aproxima a la longitud de onda de las ondas. Habitualmente, uno no puede a simple vista observar la difracción de la luz, ya que la mayoría de los objetos interpuestos en un haz de luz son mucho mayores que la longitud de onda de las ondas de luz, cuya magnitud es del orden de 5×10^{-7} m.*

* Sugerimos en este punto que el estudiante relea la sección 20.2.

En este capítulo estudiaremos la difracción producida por ciertas aberturas y pantallas de geometría simple, en dos circunstancias especiales. En la *difracción de Fraunhofer* suponemos que los rayos incidentes son paralelos y que observamos el patrón de difracción a una distancia lo suficientemente grande como para que efectivamente recibamos sólo rayos difractados paralelos. Esto se puede también llevar a cabo utilizando una lente que enfoque sobre el mismo punto de una pantalla los rayos difractados en una misma dirección. En la *difracción de Fresnel*, bien los rayos incidentes se originan en una fuente puntual, bien se observan los rayos difractados en un punto determinado del espacio, o bien ambas cosas.

Intimamente relacionada con la difracción está la *difusión*, que tiene lugar cuando los obstáculos interpuestos en la onda se convierten a su vez en fuentes de nuevas ondas. En el capítulo 19 estudiamos la difusión de ondas electromagnéticas por electrones individuales. En este capítulo consideraremos brevemente la difusión desde un punto de vista más general.

23.2 Difracción de Fraunhofer por una rendija rectangular

Como primer ejemplo de difracción, consideremos una rendija rectangular muy estrecha y larga, de modo que podamos ignorar los efectos en los extremos. Supondremos también que las ondas incidentes son normales al plano de la rendija. Esto simplifica la matemática sin cambiar el contenido físico. De acuerdo con el principio de Huygens, cuando la onda incide sobre la rendija todos los puntos de su plano se convierten en fuentes secundarias de ondas, emitiendo nuevas ondas, que en nuestro caso se denominan ondas *difractadas*, cuya amplitud resultante se calcula usando la ec. (20.2). Observando las ondas difractadas a diferentes ángulos θ respecto a la dirección de incidencia (fig. 23-3), encontramos que para ciertas direcciones su intensidad es nula. Estas direcciones están dadas por la relación

$$b \sin \theta = n\lambda, \quad n \neq 0, \quad (23.1)$$

donde n es un número entero negativo o positivo, b es el ancho de la rendija y λ la longitud de onda de las ondas incidentes. Se excluye el valor $n = 0$ porque corresponde a la observación según la dirección de incidencia, lo cual implica evidentemente un máximo de iluminación.

Según la ec. (23.1), tenemos

$$\sin \theta = n\lambda/b, \quad (23.2)$$

de modo que la intensidad es cero para $\sin \theta = \pm\lambda/b, \pm 2\lambda/b, \pm 3\lambda/b, \dots$. Para justificar la ec. (23.1), recordemos que según la ec. (22.8), cuando la diferencia de camino para dos rayos es $r_1 - r_2 = \text{entero impar} \times (\lambda/2)$, hay interferencia destructiva. Ahora bien, vemos en la fig. 23-3 que para los rayos provenientes de A y del punto medio C tenemos $r_1 - r_2 = CF = \frac{1}{2}b \sin \theta = n(\lambda/2)$; de modo que para $n = 1, 3, 5, \dots$, tanto estos dos rayos como cualquier otro par de rayos provenientes de puntos separados por $\frac{1}{2}b$, interfieren destructivamente y no se

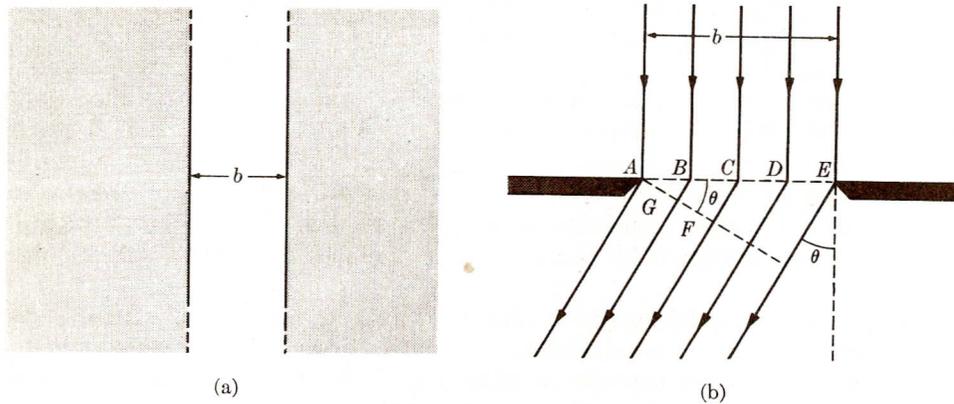


Fig. 23-3. Difracción por una rendija angosta y larga.

observa ninguna onda en la dirección θ . Para n par, consideremos los puntos A y B cuya separación es $b/4$. Tenemos

$$r_1 - r_2 = BG = \frac{1}{4}b \text{ sen } \theta = (n/2) (\lambda/2).$$

Por lo tanto, cuando $n/2$ es un entero impar, o $n = 2, 6, 10, \dots$, estos dos rayos, así como cualquier otro par de rayos provenientes de puntos separados por $b/4$, interfieren destructivamente y nuevamente no se observa onda alguna en la dirección correspondiente al ángulo θ . Se puede extender el procedimiento hasta

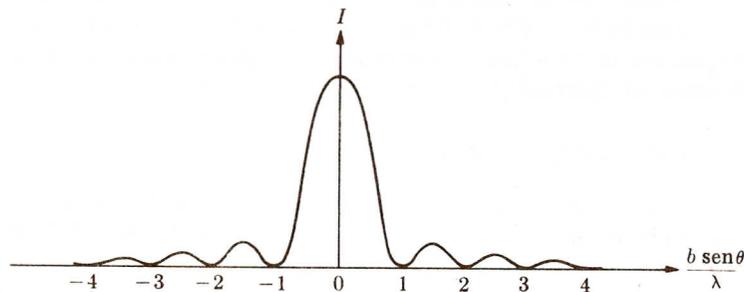


Fig. 23-4. Distribución de intensidad en el diagrama de difracción de una rendija angosta y larga.

incluir todos los enteros. Para $\theta = 0$, sin embargo, no hay desfase entre los rayos provenientes de puntos diferentes y la interferencia es constructiva, resultando un máximo pronunciado.

Entre los ceros de intensidad dados por la ec. (23.1) hay máximos cuya intensidad decrece gradualmente, lo cual difiere de lo que ocurre en la interferencia. En la fig. 23-4 se ha representado la intensidad de las ondas difractadas en función de θ . Obsérvese que el máximo central tiene un ancho doble del de los demás.

La fig. 23-5 muestra el diagrama de difracción de una rendija rectangular.

Es a la vez fácil e instructivo calcular la distribución de intensidad que aparece en la fig. 23-4. Si dividimos la rendija en bandas muy angostas de ancho dx , como se muestra en la fig. 23-6(a), podemos considerar cada banda como una fuente secundaria de ondas de amplitud $d\xi_0$, muy pequeña. Si consideramos los rayos

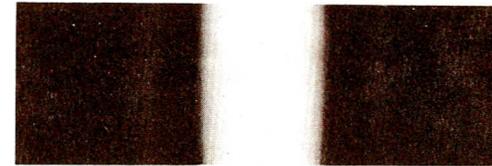


Fig. 23-5. Diagrama de difracción de Fraunhofer producido por una rendija angosta y larga.

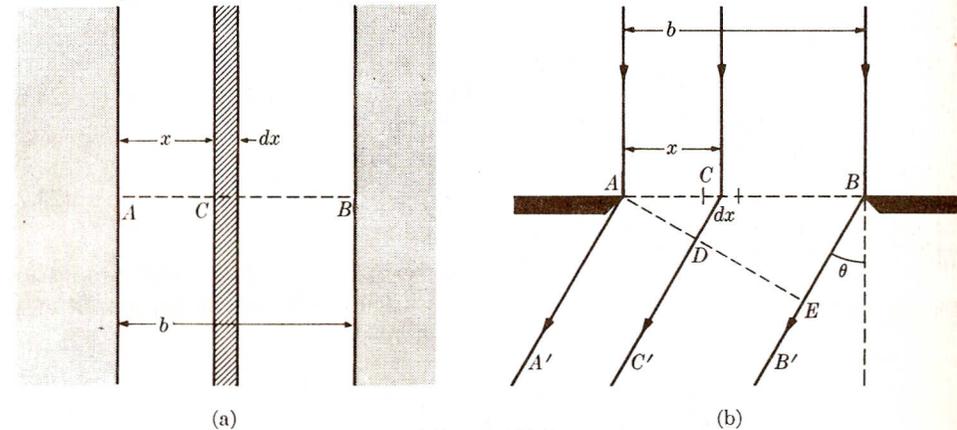


Figura 23-6

emitidos en la dirección correspondiente al ángulo θ (fig. 23-6b), el desfase entre el rayo CC' y el AA' tomado como referencia, es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} CD = \frac{2\pi x \text{ sen } \theta}{\lambda}, \tag{23.3}$$

y por lo tanto aumenta gradualmente con x . Para obtener la amplitud en la dirección correspondiente al ángulo θ , debemos representar los vectores rotantes correspondientes a las ondas que provienen de todas las bandas entre A y B . Como todas son de amplitud infinitesimal y como el ángulo de fase δ aumenta proporcionalmente a x , los vectores yacen sobre un arco de circunferencia OP cuyo centro está en C y cuyo radio es ρ (fig. 23-7). La amplitud resultante A es la cuerda OP . La pendiente en cualquier punto del arco entre O y P es justamente el ángulo δ

dato por la ec. (23.3). En P , que corresponde a $x = b$, la inclinación de la tangente es

$$\alpha = \frac{2\pi b \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \tag{23.4}$$

Este es también el ángulo formado por los dos radios CO y CP . Por consiguiente, la amplitud resultante es

$$A = \text{cuerda } OP = 2QP = 2\rho \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha = 2\rho \operatorname{sen} (\pi b \operatorname{sen} \theta/\lambda). \tag{23.5}$$

Para observación normal, todos los vectores $d\xi_0$ son paralelos y su resultante es simplemente la suma de sus longitudes, que es igual a la longitud del arco desde O hasta P . Llamando A_0 la amplitud resultante para observación normal ($\theta = 0$), tenemos entonces

$$A_0 = \text{arco } OP = \rho\alpha = \rho(2\pi b \operatorname{sen} \theta/\lambda). \tag{23.6}$$

Dividiendo la ec. (23.5) por la ec. (23.6) obtenemos

$$A = A_0 \left[\frac{\operatorname{sen} (\pi b \operatorname{sen} \theta/\lambda)}{\pi b \operatorname{sen} \theta/\lambda} \right], \tag{23.7}$$

y como las intensidades son proporcionales a los cuadrados de las amplitudes, obtenemos

$$I = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen} (\pi b \operatorname{sen} \theta/\lambda)}{\pi b \operatorname{sen} \theta/\lambda} \right]^2 = I_0 \left(\frac{\operatorname{sen} u}{u} \right)^2, \tag{23.8}$$

donde $u = \pi b \operatorname{sen} \theta/\lambda$. Verificamos entonces que los ceros de intensidad ocurren para $u = n\pi$, o sea $b \operatorname{sen} \theta = n\lambda$, de acuerdo con la ec. (23.1), excepto para $n = 0$ porque entonces $(\operatorname{sen} u/u)_{u=0} = 1$. Para obtener los máximos de intensidad, debemos hallar los valores de u que satisfacen $dI/du = 0$ (ver ejemplo 23.1). Sin embargo, estos máximos de intensidad corresponden a valores de u cada vez mayores, por lo que son cada vez menores, resultando el diagrama que se mostró en la fig. 23-4. Cuando λ es muy pequeña respecto a b , los primeros ceros de intensidad a ambos lados del máximo central corresponden al ángulo

$$\theta \approx \operatorname{sen} \theta = \pm \frac{\lambda}{b}, \tag{23.9}$$

que se obtiene haciendo $n = \pm 1$ en la ec. (23.1). Esto se muestra en la fig. 23-8. El poder resolvente de una rendija es un concepto útil; fue definido por el físico inglés Lord Rayleigh como el ángulo mínimo que subtenden dos ondas incidentes

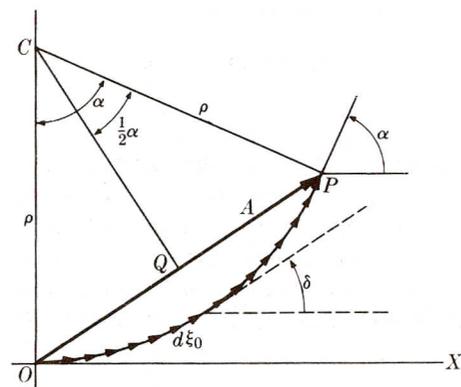


Figura 23-7

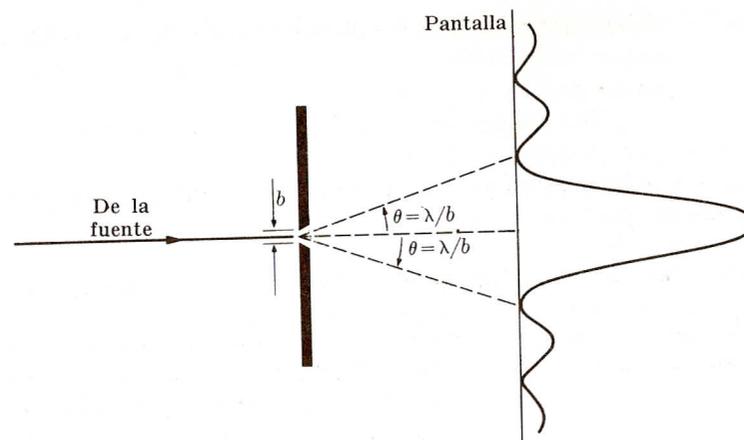


Fig. 23-8. Ángulo subtendido por el pico central de intensidad del diagrama de difracción de una rendija.

provenientes de dos fuentes puntuales distantes que permita distinguir sus respectivos diagramas de difracción. Cuando las ondas provenientes de dos fuentes distantes S_1 y S_2 pasan a través de la misma rendija en dos direcciones que forman un ángulo θ (fig. 23-9), los diagramas de difracción de los dos conjuntos de ondas están superpuestos. Se puede comenzar a distinguirlos cuando el máximo central de uno cae en el primer cero, a un lado u otro del máximo central, del otro, como se indica a la derecha de la fig. 23.9. Pero entonces, teniendo en cuenta la ec. (23.9) y la fig. 23-8, el ángulo θ debe ser

$$\theta = \lambda/b, \tag{23.10}$$

que da el poder resolvente de la rendija conforme a la definición de Rayleigh.

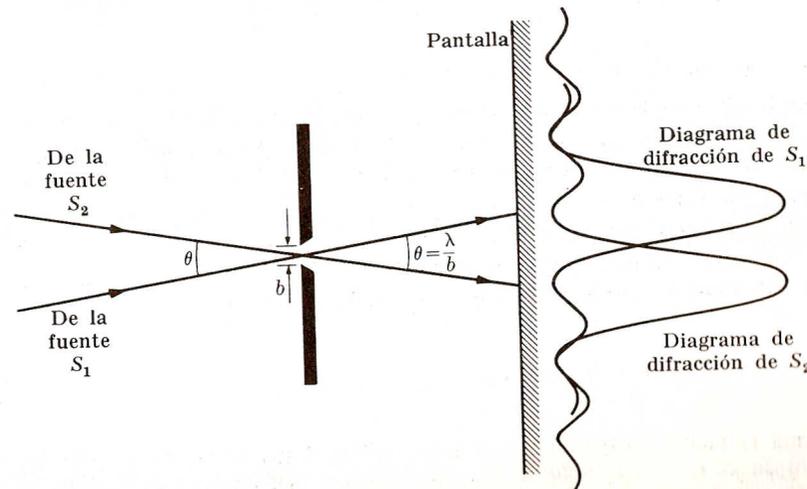


Fig. 23-9. Criterio de Rayleigh para el poder de resolución de una rendija.

Suponiendo que S_1 y S_2 son dos puntos de un objeto distante, la ec. (23.10) da la separación angular mínima entre dichos puntos para que se puedan reconocer como diferentes cuando se observa el objeto a través de la rendija. Si la luz que pasa por la rendija forma una imagen sobre una pantalla y se observa la imagen con un microscopio, por ejemplo, no es posible, cualquiera sea el aumento del microscopio, observar más detalles en la imagen que los permitidos por el poder resolvente de la rendija. Estas consideraciones deben ser tomadas en cuenta en el diseño de instrumentos ópticos.

Si la rendija es un rectángulo de lados a y b de longitud comparable (fig. 23-10), el diagrama de difracción es la combinación de los dos diagramas debidos a cada par de lados. En vez de la serie de bandas mostradas en la fig. 23-5, se obtiene

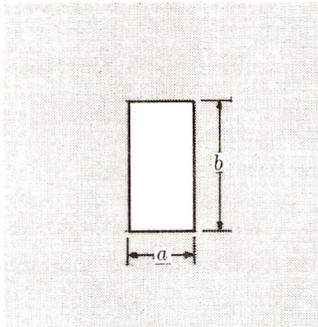


Fig. 23-10. Rendija rectangular.

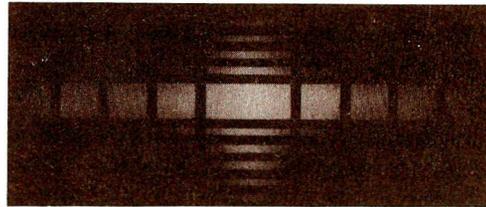


Fig. 23-11. Diagrama de difracción de Fraunhofer de una rendija rectangular cuya altura es el doble de su ancho.

una serie de rectángulos dispuestos en forma de cruz, como en la fotografía de la fig. 23-11.

En nuestro cálculo no hemos tenido en cuenta el factor direccional

$$g = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$

que mencionamos en la ec. (20.2) al estudiar el principio de Huygens. Este factor tiende a disminuir aún más la amplitud de los máximos de orden superior.

EJEMPLO 23.1. Estimar la magnitud de los máximos sucesivos en el diagrama de difracción de una rendija.

Solución: De acuerdo con la ec. (23.8), los máximos sucesivos corresponden a los máximos de la fracción $\text{sen } u/u$. Debemos hallar por lo tanto

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\text{sen } u}{u} \right) = 0 \quad \text{ó} \quad \text{tg } u = u.$$

Esta es una ecuación trascendente de tipo similar a la que apareció anteriormente en el ejemplo 22.6. Sus soluciones se encuentran representando $y = \text{tg } u$ e $y = u$, y hallando los puntos de intersección de ambas curvas; se deja esto para que lo haga el estudiante. Sin embargo, podemos hacer una estimación suponiendo que

los máximos de $\text{sen } u/u$ están muy cerca de los máximos de $\text{sen } u$, es decir cuando $u = (n + \frac{1}{2})\pi$. Los verdaderos valores de u son siempre menores que este estimado. Despreciando esta pequeña diferencia, encontramos que los valores de $\text{sen } u/u$ en los máximos son $1/(n + \frac{1}{2})\pi$, siendo las correspondientes intensidades

$$I = \frac{I_0}{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2} = 0,045I_0, 0,016I_0, 0,008I_0.$$

23.3 Difracción de Fraunhofer por una abertura circular

La difracción de Fraunhofer por una abertura circular presenta muchas de las características ya vistas en el caso de la rendija rectangular, pero en vez de un diagrama rectangular como el que se muestra en la fig. 23-11, el diagrama de difracción consiste en un disco brillante rodeado de anillos, alternadamente oscuros y brillantes, como se muestra en la fig. 23-12. Los radios del disco central y de los anillos sucesivos no siguen una secuencia simple. Omitiremos el análisis mate-



Fig. 23-12. Diagrama de difracción de Fraunhofer de una abertura circular.

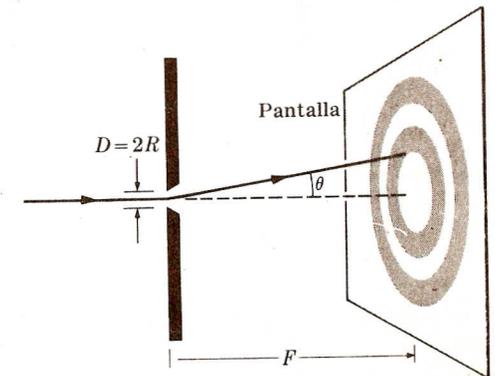


Figura 23-13

mático del problema, que es mucho más complicado que el de la rendija rectangular debido a la forma geométrica. Siendo R el radio de la abertura (fig. 23-13), el ángulo correspondiente al primer disco oscuro está dado por la condición

$$\frac{2\pi R \text{sen } \theta}{\lambda} = 3,8317 \tag{23.11}$$

ó

$$\theta \approx \text{sen } \theta = 1,22 \frac{\lambda}{2R} = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \tag{23.12}$$

donde $D = 2R$ es el diámetro de la abertura y θ está expresado en radianes. Esta expresión da además el poder resolvente de una abertura circular definido, también según Rayleigh, como el ángulo mínimo entre las direcciones de inciden-

cia de dos ondas planas provenientes de dos fuentes puntuales distantes, que permita distinguir sus respectivos diagramas de difracción. Esto ocurre cuando el centro del disco brillante del diagrama de difracción de una de las fuentes cae en el primer anillo oscuro del diagrama de difracción de la otra (fig. 23-14). La separación angular está dada por la ec. (23.12), es decir, $\theta = 1,22\lambda/D$. Esta expresión se utilizó en la sección 21.5 al estudiar el aumento de un telescopio.

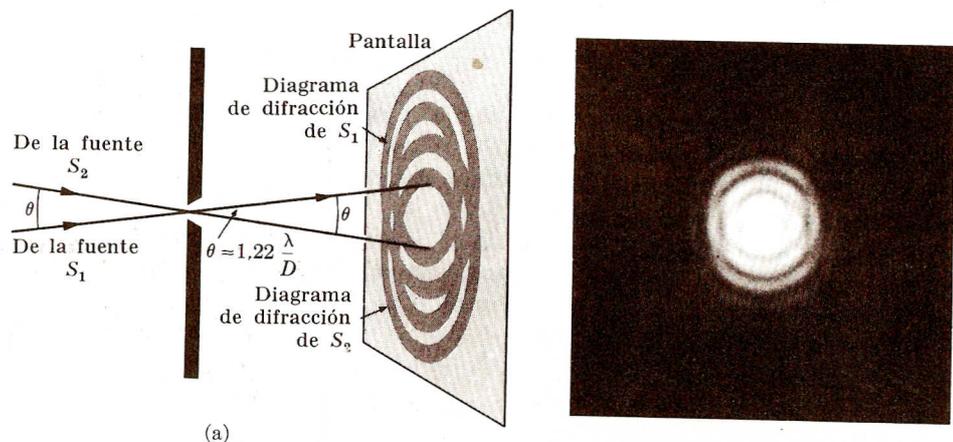


Fig. 23-14. Criterio de Rayleigh para el poder de resolución de una abertura circular. La parte (b) muestra las imágenes de dos fuentes puntuales obtenidas a través de una lente y apenas resueltas.

Una lente es en realidad una abertura circular, por lo que la imagen de un punto, que en el capítulo 21 se supuso que era otro punto, es en realidad un diagrama de difracción. Sin embargo, el radio de una lente es en general tan grande respecto a la longitud de onda de la luz que, para la mayoría de los fines prácticos, se pueden ignorar los efectos de difracción.

EJEMPLO 23.2. Una lente de 2,0 cm de diámetro tiene una distancia focal de 40 cm. Está iluminada con un haz paralelo de luz monocromática de $5,9 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda. Hallar el radio del disco central del patrón de difracción observado en un plano que pasa por el foco. Determinar también el poder de resolución de la lente para esta longitud de onda.

Solución: Utilizando la ec. (23.12) encontramos para el ángulo subtendido por el disco central del patrón de difracción,

$$\theta = 1,22 \times \frac{5,9 \times 10^{-7} \text{ m}}{4 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1,80 \times 10^{-5} \text{ rad} = 3,71''.$$

Este es también el poder resolvente de la lente. El radio central es, usando la ec. (2.4),

$$r = f\theta = 40 \text{ cm} \times 1,80 \times 10^{-5} \text{ rad} = 7,2 \times 10^{-4} \text{ cm},$$

y en consecuencia podemos decir para los fines prácticos, que la imagen sobre el plano focal es un punto.

23.4 Difracción de Fraunhofer por dos rendijas paralelas iguales

Consideremos ahora dos rendijas, ambas de ancho b , separadas una distancia a (fig. 23-15). Para la dirección correspondiente al ángulo θ , tenemos ahora dos conjuntos de ondas difractadas provenientes de cada rendija. En otras palabras, tenemos ahora una combinación de difracción e interferencia. Para determinar la intensidad de las ondas resultantes en función del ángulo θ , debemos calcular

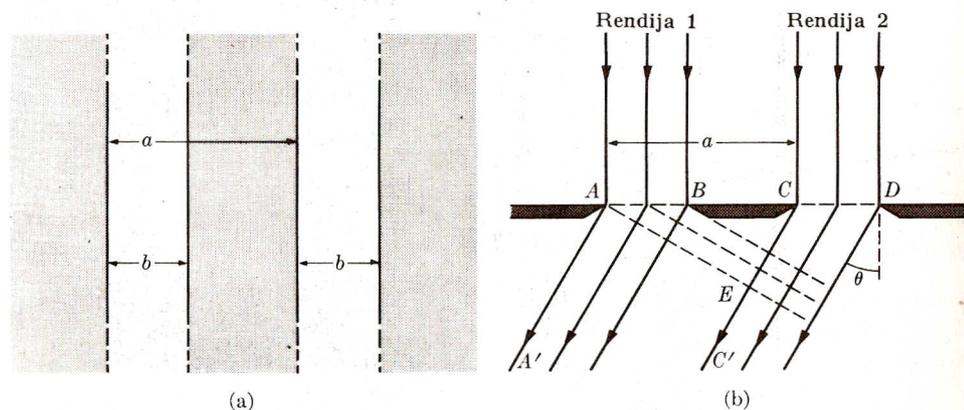


Fig. 23-15. Vista frontal y en corte de dos rendijas paralelas angostas y largas.

la amplitud resultante de cada rendija y combinar las dos amplitudes para obtener la resultante final. Esto se muestra en la fig. 23-16 en la que se ha dibujado los diferentes vectores rotatorios. El ángulo α tiene el valor dado por la ec. (23.4). El vector \vec{OP} da la amplitud A_1 resultante de la rendija 1. El valor de esta amplitud es, según la ec. (23.7),

$$A_1 = A_0 \frac{\text{sen}(\pi b \text{sen} \theta / \lambda)}{\pi b \text{sen} \theta / \lambda}. \quad (23.13)$$

Como las dos rendijas tienen el mismo ancho, la amplitud resultante para la rendija 2 tiene el mismo valor A_1 pero su fase es diferente. En la fig. 23-15 observamos que entre rayos correspondientes de las rendijas 1 y 2, tales como el AA' y el CC', hay una diferencia de fase constante dada por

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} CE = \frac{2\pi a \text{sen} \theta}{\lambda}. \quad (23.14)$$

En consecuencia las amplitudes o vectores correspondientes de las dos rendijas

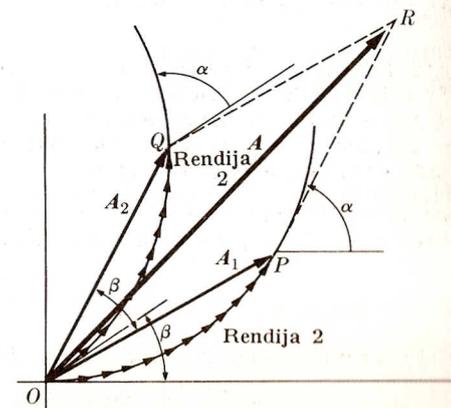


Figura 23-16

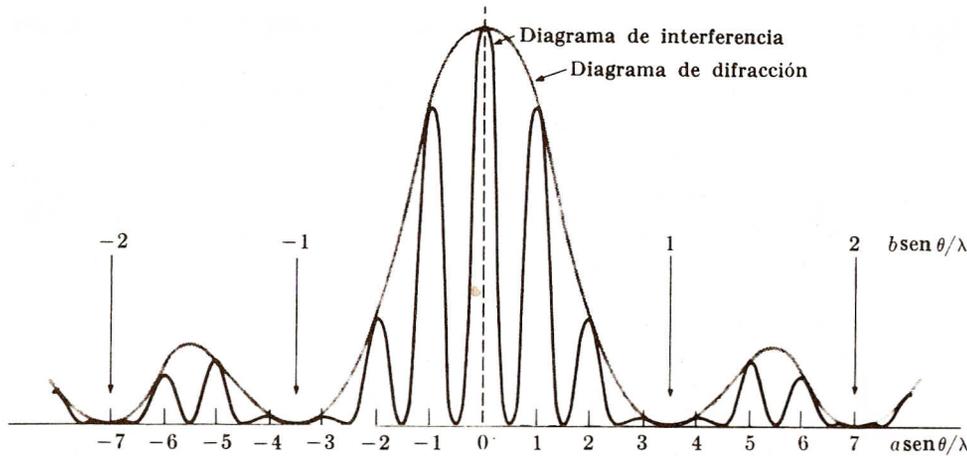


Fig. 23-17. Distribución de intensidad (sobre un plano normal a la luz incidente) proveniente de dos rendijas paralelas angostas y largas.

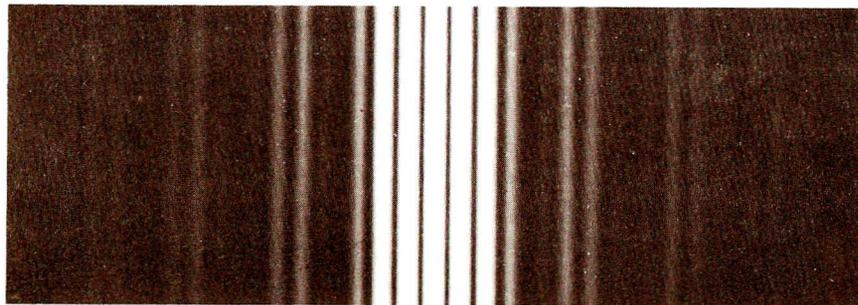


Fig. 23-18. Diagrama de difracción de Fraunhofer debido a dos rendijas paralelas angostas y largas.

forman un ángulo igual a β . De acuerdo con esto, en la fig. 23-16 la línea $OQ = A_2$ correspondiente a la rendija 2 se obtiene rotando en un ángulo β la línea $OP = A_1$, correspondiente a la rendija 1. La amplitud A resultante de ambas es entonces

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \beta}.$$

Haciendo $A_1 = A_2$ podemos escribir, usando la ec. (M.14),

$$A = A_1 \sqrt{2(1 + \cos \beta)} = 2A_1 \cos \frac{1}{2}\beta.$$

Por lo tanto, empleando las ecs. (23.13) y (23.14), obtenemos

$$A = 2A_0 \frac{\text{sen}(\pi b \text{sen} \theta / \lambda)}{\pi b \text{sen} \theta / \lambda} \cos \frac{\pi a \text{sen} \theta}{\lambda}.$$

La distribución de intensidad que sabemos es proporcional al cuadrado de la

amplitud, es entonces

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}(\pi b \text{sen} \theta / \lambda)}{\pi b \text{sen} \theta / \lambda} \right]^2 \cos^2 \frac{\pi a \text{sen} \theta}{\lambda}. \tag{23.15}$$

Si comparamos esta ecuación con la ec. (23.8) correspondiente a una sola rendija, vemos que ahora tenemos el factor adicional $\cos^2(\pi a \text{sen} \theta / \lambda)$. Pero si recordamos la ec. (22.10), que da la distribución de intensidad para el diagrama de interferencia de dos fuentes sincrónicas, vemos que las ecs. (22.10) y (23.15) coinciden en lo que respecta al factor de interferencia, ya que en la ec. (23.15) a es la separación de las dos rendijas y en la ec. (22.10) a es la separación de las dos fuentes. Por lo tanto la expresión que describe el diagrama de difracción total de dos rendijas es la expresión que describe el diagrama de interferencia de dos fuentes sincrónicas, modulado por la expresión del diagrama de difracción de una sola rendija. Esto se muestra en la fig. 23-17 y en la fotografía de la fig. 23-18.

Obsérvese que los máximos del diagrama de interferencia se dan para $\pi a \text{sen} \theta / \lambda = n\pi$, o $\text{sen} \theta = n(\lambda/a)$, mientras que los ceros del diagrama de difracción están dados por la ec. (32.2) o sea, $\text{sen} \theta = n'(\lambda/b)$. Como $a > b$, los ceros del diagrama de difracción están más espaciados que los máximos del diagrama de interferencia. En consecuencia, cuando hay dos rendijas, las franjas brillantes son mucho más angostas y están mucho más juntas que las producidas por una sola rendija.

23.5 Redes de difracción

Lógicamente, el paso siguiente es considerar el diagrama de difracción producido por varias rendijas paralelas de igual ancho b , espaciadas regularmente una distancia a . Sea N el número de rendijas. Vemos en la fig. 23-19 por analogía con el problema de la doble rendija, que en la dirección correspondiente al ángulo θ debemos observar la interferencia debida a N fuentes sincrónicas (una por ren-

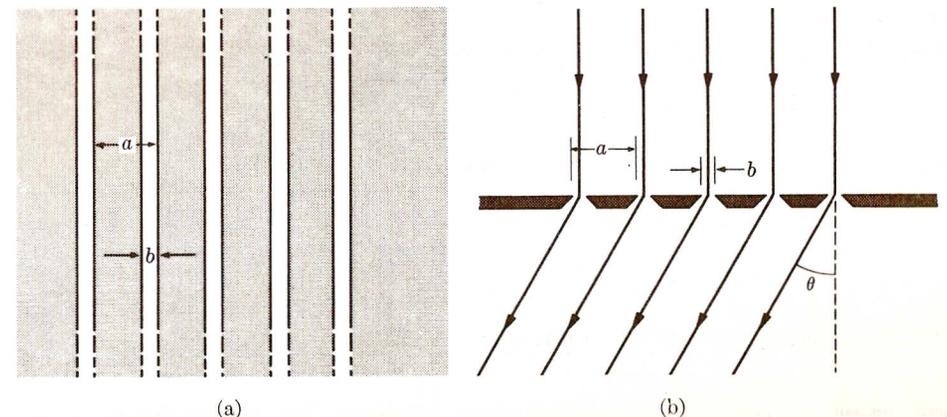


Fig. 23-19. Vista frontal y en corte de una red de difracción.

dija) modulada por el diagrama de difracción de una rendija. Como la separación entre fuentes sucesivas es a , el factor de interferencia en la intensidad es el dado por la ec. (22.14), es decir,

$$\left[\frac{\text{sen}(N\pi a \text{sen } \theta/\lambda)}{\text{sen}(\pi a \text{sen } \theta/\lambda)} \right]^2,$$

mientras que según la ec. (23.8), el factor de difracción es

$$\left[\frac{\text{sen}(\pi b \text{sen } \theta/\lambda)}{\pi b \text{sen } \theta/\lambda} \right]^2.$$

La distribución de intensidad es entonces

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}(\pi b \text{sen } \theta/\lambda)}{\pi b \text{sen } \theta/\lambda} \right]^2 \left[\frac{\text{sen}(N\pi a \text{sen } \theta/\lambda)}{\text{sen}(\pi a \text{sen } \theta/\lambda)} \right]^2. \quad (23.16)$$

Si el número N de rendijas es grande, el diagrama consistirá en una serie de franjas brillantes angostas correspondientes a los máximos principales del diagrama de interferencia, los cuales, según la ec. (22.15), están dados por

$$a \text{sen } \theta = n\lambda \quad \text{ó} \quad \text{sen } \theta = n(\lambda/a), \quad (23.17)$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, pero sus intensidades están moduladas por el diagrama de difracción. La fig. 23-20 muestra el caso de ocho rendijas ($N = 8$). Según el valor de n , los máximos principales se denominan primero, segundo, tercero, etc., *orden de difracción*.

Un sistema tal como el que acabamos de estudiar se denomina *red de difracción por transmisión*. A los fines de analizar luz infrarroja cercana, visible o ultravioleta, las redes de difracción por transmisión constan de varios miles de rendijas por centímetro, obtenidas grabando una serie de líneas paralelas sobre una película transparente. Las líneas hacen entonces las veces de los espacios opacos entre

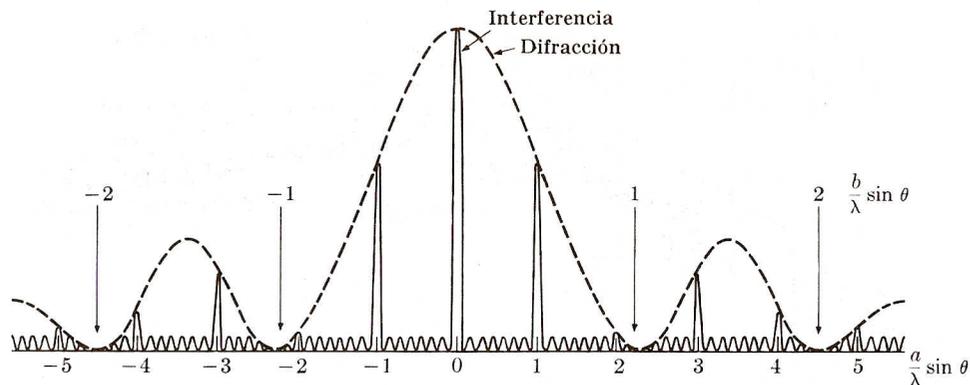


Fig. 23-20. Distribución de intensidad producida por una red de difracción sobre un plano normal a la luz incidente y paralelo a la red.

las rendijas. Una red de difracción puede también trabajar por reflexión: se graba una serie de líneas paralelas sobre una superficie metálica; las bandas estrechas entre las líneas grabadas reflejan la luz produciendo un diagrama de difracción (ver problema 23.31). Algunas veces la superficie se hace cóncava para mejorar el enfoque (ver problema 23.32).

Cuando sobre una red incide luz de diversas longitudes de onda, éstas producen máximos de difracción a ángulos diferentes, excepto para el orden cero, que es el mismo para todas. El conjunto de máximos de un orden dado para todas las longitudes de onda constituye un *espectro*. Tenemos entonces espectros de primero, segundo, tercer, etc., orden. Nótese que cuanto mayor es la longitud de onda, mayor es la desviación para un orden dado del espectro. En consecuencia el rojo se desvía más que el violeta que es lo contrario de lo que ocurre en la dispersión de la luz en un prisma. La *dispersión* de una red se define por $D = d\theta/d\lambda$. De la ec. (23.17) se deduce que $\cos \theta d\theta/d\lambda = n/a$, de modo que

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{a \cos \theta}, \quad (23.18)$$

lo cual indica que cuanto mayor es el orden de difracción, mayor es la dispersión. Las redes de difracción son muy importantes para el análisis de espectros y tienen varias ventajas sobre los prismas. Una de las ventajas es que las redes de difracción no dependen de las propiedades dispersivas del material sino solamente de la geometría de la red. La fig. 23-21 muestra los elementos básicos de un espectroscopio de red.

EJEMPLO 23.3. Una red de 20 000 líneas tiene una longitud de 4 cm. Hallar la separación angular de todo el espectro visible para el primero y para el segundo

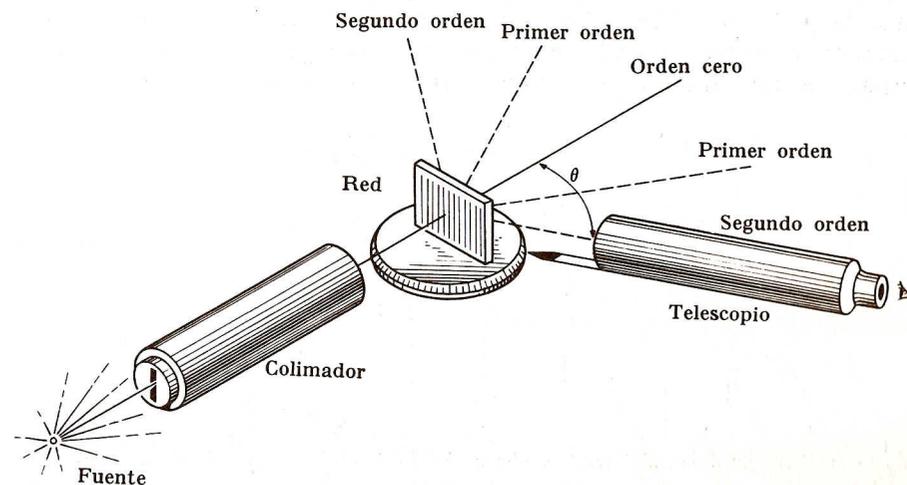


Fig. 23-21. Espectroscopio de red. Se coloca la fuente frente a la rendija del colimador. Se coloca la red perpendicularmente al eje del colimador y se investiga los espectros de órdenes diferentes moviendo el telescopio.

orden. Suponer que las longitudes de onda van de $3,90 \times 10^{-7}$ m (violeta) a $7,70 \times 10^{-7}$ m (rojo), como se mencionó en la sección 19.15.

Solución: Tenemos que $a = 4 \times 10^{-2}$ m/20 000 = 2×10^{-6} m. Por lo tanto, usando la ec. (23.17) tenemos para $n = 1$

$$\text{sen } \theta_{\text{rojo}} = \frac{7,70 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-6}} = 0,335 \quad \text{ó} \quad \theta_{\text{rojo}} = 19^\circ 34',$$

$$\text{sen } \theta_{\text{violeta}} = \frac{3,90 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-6}} = 0,195 \quad \text{ó} \quad \theta_{\text{violeta}} = 11^\circ 15'.$$

En consecuencia el espectro de primer orden abarca un ángulo de $8^\circ 19'$. Análogamente el ángulo para el espectro de segundo orden es $22^\circ 27'$, como el estudiante puede calcular por sí mismo. ¿Es posible un espectro de tercer orden completo?

EJEMPLO 23.4. Estudiar la posición de los máximos cuando el ángulo de incidencia de ondas planas monocromáticas sobre una red de difracción no es cero. En la fig. 23-22 el ángulo de incidencia es i y el de difracción es θ .

Solución: Los máximos principales están determinados por el diagrama de interferencia, el cual a su vez está determinado por el desfase entre rayos correspondientes provenientes de rendijas sucesivas. La fig. 23-22 muestra que ese desfase está dado por

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (AB + BC) = \frac{2\pi a(\text{sen } i + \text{sen } \theta)}{\lambda}.$$

Para que esta expresión tenga validez general, los ángulos i y θ deben tener los signos indicados en la figura. La condición de máximos es entonces

$$a(\text{sen } i + \text{sen } \theta) = n\lambda \quad \text{ó} \quad \text{sen } \theta = n\lambda/a - \text{sen } i.$$

Para $n = 0$, tenemos $\text{sen } \theta = -\text{sen } i$ o sea $\theta = -i$, que corresponde a la continuación del rayo incidente. Si transformamos la condición anterior de máximo en un producto por medio de la ec. (M.7), tenemos

$$2a \text{sen } \frac{1}{2}(i + \theta) \cos \frac{1}{2}(i - \theta) = n\lambda.$$

Por consiguiente $D = i + \theta$ para el máximo de orden n se puede obtener de

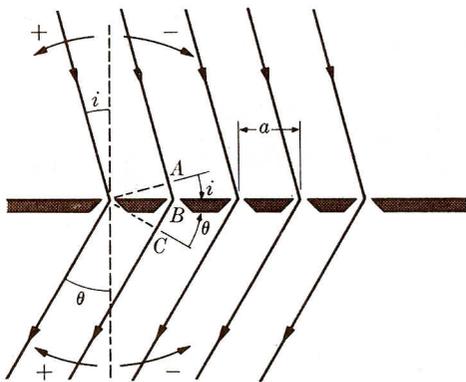


Fig. 23-22. Red de difracción con incidencia oblicua.

$$\text{sen } \frac{1}{2}D = \frac{n\lambda}{2a} \sec \frac{1}{2}(i - \theta)$$

y la desviación es entonces mínima cuando $\theta = i$; el ángulo de incidencia para la desviación mínima en el orden n se obtiene de

$$\text{sen } i = n\lambda/2a.$$

EJEMPLO 23.5. Estudiar el poder resolvente de una red de difracción.

Solución: Cuando dos ondas planas de longitud de onda ligeramente diferente inciden en una red de difracción, los máximos principales del mismo orden para ca-

da longitud de onda pueden caer tan cerca uno de otro que es imposible distinguir si el haz original es monocromático o no. Para poder distinguir (o resolver) las dos longitudes de onda en un orden determinado, es necesario que el máximo principal correspondiente a una de las longitudes de onda caiga sobre el primer cero a uno u otro lado del primer máximo de la otra longitud de onda. Si $\Delta\lambda$ es la mínima diferencia de longitud de onda para la cual se satisface la condición anterior a una longitud de onda λ , el poder resolvente de la red es

$$R = \lambda/\Delta\lambda.$$

Consideremos, por ejemplo, una longitud de onda λ tal que valga la ec. (23.17). Los máximos de intensidad corresponden a los ángulos dados por $\text{sen } \theta = n\lambda/a$. Luego

$$\cos \theta \Delta\theta = n\Delta\lambda/a.$$

Pero según la ec. (23.16), los ceros a cada lado del máximo de orden n están dados por

$$\frac{N\pi a \text{sen } \theta}{\lambda} = (Nn \pm 1)\pi \quad \text{ó} \quad \text{sen } \theta = \frac{Nn \pm 1}{N} \frac{\lambda}{a}.$$

Llamando θ' y θ'' los dos ángulos dados por esta ecuación, tenemos que

$$\text{sen } \theta' - \text{sen } \theta'' = 2\lambda/Na,$$

o sea, usando la ec. (M.7), $\text{sen } \frac{1}{2}(\theta' - \theta'') \cos \frac{1}{2}(\theta' + \theta'') = \lambda/Na$. Como θ' es casi igual a θ'' , podemos reemplazar $\text{sen } \frac{1}{2}(\theta' - \theta'')$ por $\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')$ y $\cos \frac{1}{2}(\theta' + \theta'')$ por $\cos \theta$ y escribir $\frac{1}{2}(\theta' - \theta'') \cos \theta = \Delta\theta \cos \theta = \lambda/Na$. Pero de la ecuación dada más arriba se tiene $\cos \theta \Delta\theta = n\Delta\lambda/a$. Por lo tanto, tenemos finalmente

$$\lambda/N = n\Delta\lambda \quad \text{ó} \quad R = \lambda/\Delta\lambda = Nn.$$

Por consiguiente, a mayor número total de líneas de la red y a mayor orden del espectro, menor es $\Delta\lambda$ y mayor es entonces el poder resolvente de la red. Por otra parte, el poder resolvente es independiente del tamaño y del espaciamiento de las líneas de la red.

EJEMPLO 23.6. Determinar si la red del ejemplo 23.3 puede resolver las dos líneas amarillas del sodio, cuyas longitudes de onda son $5,890 \times 10^{-7}$ m y $5,896 \times 10^{-7}$ m.

Solución: La longitud de onda promedio de las dos líneas es $5,893 \times 10^{-7}$ m y su separación es 6×10^{-10} m. De acuerdo con los resultados del ejemplo 23.5 tenemos que el poder resolvente de la red es $R = Nn = 2 \times 10^4 n$. Para la longitud de onda dada, la diferencia mínima de longitudes de onda en el espectro del primer orden es

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{5,893 \times 10^{-7}}{2 \times 10^4 \times 1} = 2,947 \times 10^{-11} \text{ m},$$

que es un veinteavo de la separación de las dos líneas del sodio. Evidentemente uno podría entonces ver nítidamente las dos líneas D en el espectro de primer orden producido por la red.

23.6 Difracción de Fresnel

Como se explicó en la sección 23.1, la difracción de Fresnel tiene lugar cuando, o la fuente puntual de ondas incidentes, o el punto de observación desde el cual se las ve, o ambos, están a una distancia finita de la abertura o del obstáculo. Los cálculos matemáticos correspondientes a la difracción de Fresnel son mucho

más complicados que los correspondientes a la difracción de Fraunhofer, pero las ideas físicas son las mismas. Por lo tanto sólo discutiremos los aspectos fundamentales, suponiendo que la fuente de las ondas está tan lejos de la pantalla que las ondas incidentes son planas, y que se propagan perpendicularmente a la pantalla.

Supongamos que queremos determinar el movimiento ondulatorio en el punto P cuando conocemos el movimiento ondulatorio sobre un cierto frente de onda plano S (fig. 23-23). De acuerdo con el principio de Huygens-Kirchhoff formulado en la sección 20.2, podemos dividir el frente de onda en elementos de superficie. La simetría sugiere que los elijamos en forma de anillos circulares con centro en la proyección Q de P sobre el plano S . Luego, de acuerdo con la ec. (20.2), la contribución del elemento superficial de área dS al movimiento ondulatorio en P tiene una amplitud proporcional a

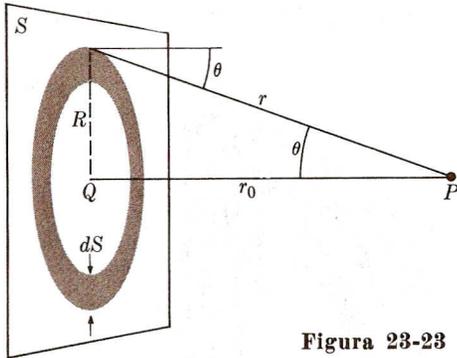


Figura 23-23

$$\frac{dS}{r} g(\theta), \quad (23.19)$$

donde dS es el área del anillo. En P la fase de la onda producida por dS será

$$\delta = \frac{2\pi r}{\lambda}. \quad (23.20)$$

Sumando los vectores rotatorios de anillos sucesivos caracterizados por las ecuaciones (23.19) y (23.20), podemos obtener la amplitud resultante en P . A causa de los factores $1/r$ y $g(\theta)$, los vectores se hacen cada vez más pequeños resultando una espiral en vez de una circunferencia, como se muestra en la fig. 23-24.

Para simplificar el cálculo, y en vista de que λ es mucho menor que r_0 , dividiremos la superficie en anillos llamados *zonas de Fresnel* (fig. 23-25), cuyas distancias a P difieren sucesivamente en $\frac{1}{2}\lambda$. Esto es, $r_1 = r_0 + \frac{1}{2}\lambda$, $r_2 = r_1 + \frac{1}{2}\lambda$, $r_3 = r_2 + \frac{1}{2}\lambda$, etc. Esta disposición tiene la propiedad de que las ondas que llegan a P provenientes de zonas sucesivas, tienen un desfase de π e interfieren destructivamente, es decir,

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{2\pi}{\lambda} (r_{n+1} - r_n) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2} \right) = \pi,$$

que corresponde a interferencia destructiva [recordar la ec. (22.7)]. Si ξ_{0n} es la amplitud que la n -ésima zona produce en P , la cual es proporcional al valor dado en la ec. (23.19), la amplitud resultante en P es

$$\xi_0 = \xi_{00} - \xi_{01} + \xi_{02} - \xi_{03} + \dots \quad (23.21)$$

Podemos también escribir esto en la forma

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\xi_{00} + \left(\frac{1}{2}\xi_{00} - \xi_{01} + \frac{1}{2}\xi_{02}\right) + \left(\frac{1}{2}\xi_{02} - \xi_{03} + \frac{1}{2}\xi_{04}\right) + \dots$$

Las amplitudes provenientes de zonas adyacentes son de magnitud casi igual, aunque disminuyen cuando n aumenta, es decir: $\xi_{00} > \xi_{01} > \xi_{02} \dots$. Podemos escribir entonces con buena aproximación, que $\frac{1}{2}\xi_{00} - \xi_{01} + \frac{1}{2}\xi_{02} \approx 0$, y en general $\frac{1}{2}\xi_{0(n-1)} - \xi_{0n} + \frac{1}{2}\xi_{0(n+1)} \approx 0$. En consecuencia, la suma de la ec. (23.21) que se extiende a todo el plano, se reduce efectivamente a

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\xi_{00}, \quad (23.22)$$

y el movimiento ondulatorio en P procede de la parte del frente de onda directamente en línea con P , siendo igual solamente a la mitad de la primera zona de Fresnel.

Obsérvese que cada zona de Fresnel está compuesta de muchos elementos circulares de superficie como el ilustrado en la fig. 23-23. Para comprender la

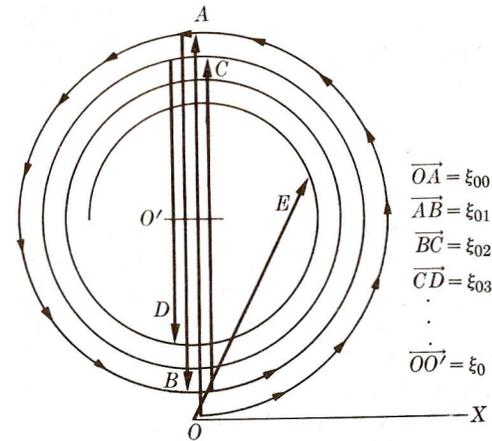


Figura 23-24

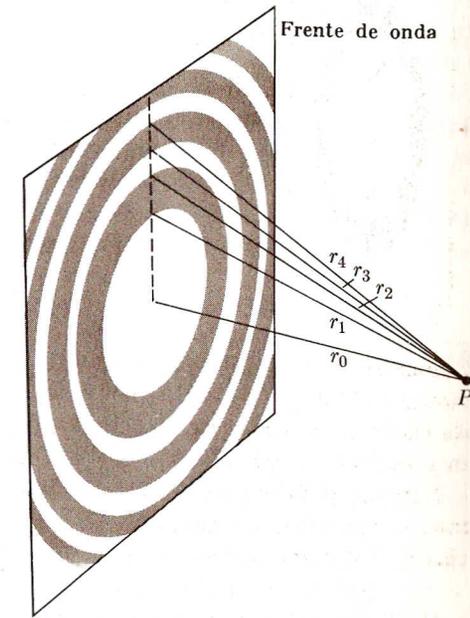


Fig. 23-25. Zonas de Fresnel sucesivas.

situación en función de un diagrama de vectores de amplitud tal como el de la fig. 23-24, hay que tener en cuenta que para la primera zona, la distancia va de r_0 a $r_0 + \frac{1}{2}\lambda$, o sea que la fase va de $2\pi r_0/\lambda$ a $(2\pi r_0/\lambda) + \pi$. Esto significa que cuando dibujamos todos los vectores de amplitud provenientes de todas las fuentes secundarias dentro de esta zona, su desfase crece gradualmente de cero a π . Estos vectores constituyen el arco desde O hasta A en la fig. 23-24 por lo que la amplitud ξ_{00} de la primera zona es el vector OA . Para la segunda zona, las distancias van de $r_0 + \frac{1}{2}\lambda$ a $r_0 + \lambda$, o las fases de $(2\pi r_0/\lambda) + \pi$ a $(2\pi r_0/\lambda) + 2\pi$, resultando nuevamente un desfase π entre los extremos, de modo que la segunda zona corresponde al arco desde A hasta B , con su amplitud ξ_{01} igual al vector AB .

Se repite este procedimiento hasta agotar todas las zonas. La espiral converge hacia el punto O' de modo que la amplitud resultante es OO' , que es aproximadamente igual a $\frac{1}{2}OA$, como en la ec. (23.22).

Es conveniente señalar que como $r_n = r_0 + \frac{1}{2}n\lambda$, el radio de la zona n es, según la fig. 23-25, $R_n^2 = r_n^2 - r_0^2 = (r_0 + \frac{1}{2}n\lambda)^2 - r_0^2 = n\lambda r_0 + \frac{1}{4}n^2\lambda^2$. Si n no es muy grande, se puede despreciar el último término (si $\lambda \ll r_0$), de modo que

$$R_n^2 = n\lambda r_0. \quad (23.23)$$

Observemos de paso que todas las zonas de Fresnel tienen la misma área, que es igual a $\pi\lambda r_0$.

Cuando una pantalla impide el avance del frente de onda, la situación es completamente diferente de la indicada en la ec. (23.22), porque entonces algunas zonas sólo contribuyen parcialmente (o no contribuyen) al movimiento oscilatorio en P . Supongamos ahora que una onda incide normalmente sobre una pantalla que tiene una abertura circular de radio a . El punto de observación está sobre una recta perpendicular a la pantalla y que pasa por el centro de la abertura, de modo que las zonas de Fresnel son concéntricas con la abertura. Cuando el punto está a una distancia r_0 tal que $a^2 = \lambda r_0$, solamente una zona pasa a través de la abertura, produciendo en P una amplitud ξ_{00} que es el doble de la obtenida en la ec. (23.22) para todo el frente de onda, resultando que la iluminación en P es ¡cuatro veces mayor que cuando no está la pantalla y está expuesto todo

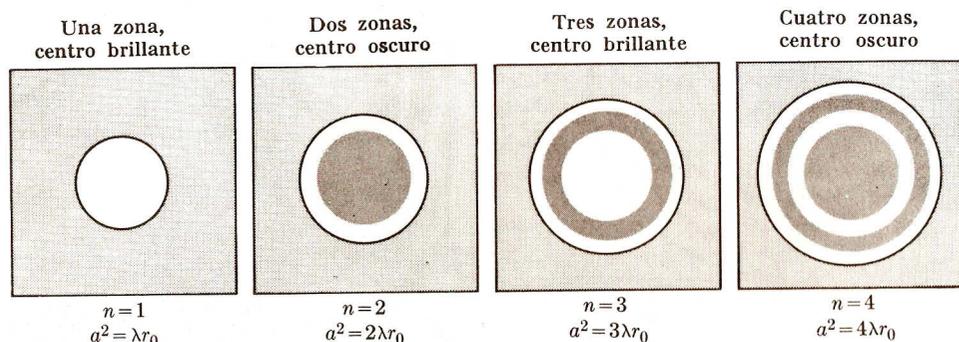


Fig. 23-26. Cambio en las zonas de Fresnel para un punto fijo, que resulta de una variación en el tamaño de la abertura.

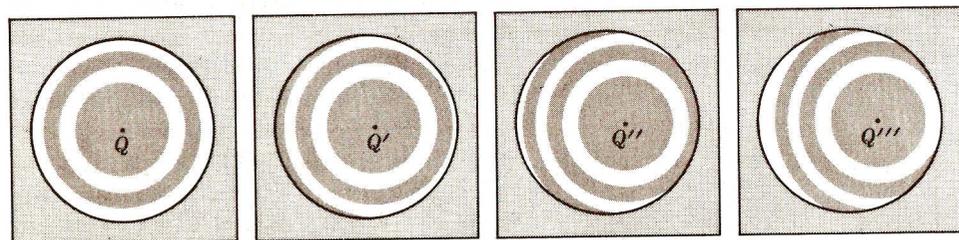


Fig. 23-27. Cambio en las zonas de Fresnel que resulta del desplazamiento de un punto paralelamente al plano de la abertura, como se muestra en la fig. 23-28.

el frente de onda! Si la abertura es mayor o el punto está más cerca, de modo que $a^2 = 2\lambda r_0$, las dos primeras zonas pasan a través de la abertura, resultando una amplitud $\xi_{00} - \xi_{01}$ que es prácticamente cero por lo que ¡hay oscuridad en P ! En general, mientras nuestra aproximación siga siendo válida, tendremos iluminación u oscuridad máximas en el centro del diagrama de difracción según que n sea impar o par, donde n es el número de zonas de Fresnel que abarca la abertura vista desde el punto donde se observa la difracción. En la fig. 23-26 se muestra la situación para diferentes valores de n .

Empleando el diagrama de la fig. 23-24, vemos que cuando sólo una zona está expuesta, la amplitud resultante es $\vec{OA} = \xi_{00}$. Cuando dos zonas están expuestas, la amplitud resultante es $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \xi_{00} - \xi_{01}$. Para tres zonas es

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \\ &= \xi_{00} - \xi_{01} + \xi_{02} \approx \frac{1}{2}(\xi_{00} + \xi_{02}), \end{aligned}$$

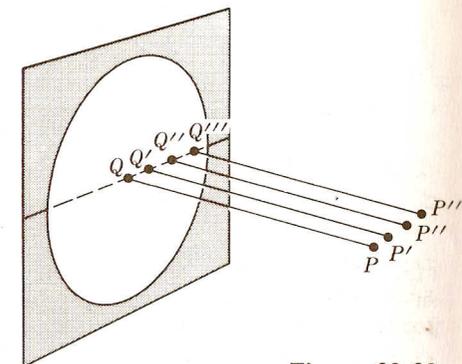


Figura 23-28

y así sucesivamente. En general, cuando está expuesto un número de zonas de Fresnel completas más una fracción, podemos obtener la amplitud resultante dibujando, en un diagrama tal como el de la fig. 23-24, el vector \vec{OE} que va de O al punto E , que corresponde al número de zonas completas más la fracción de la última. En el caso mostrado en la fig. 23-24, E corresponde a cuatro zonas más un quinto de zona.

Cuando el punto de observación se mueve lateralmente paralelo a la pantalla, las zonas de difracción se mueven con él pero ya no son simétricas respecto a la abertura, como se muestra en la fig. 23-27. En esa figura, cada caso corresponde

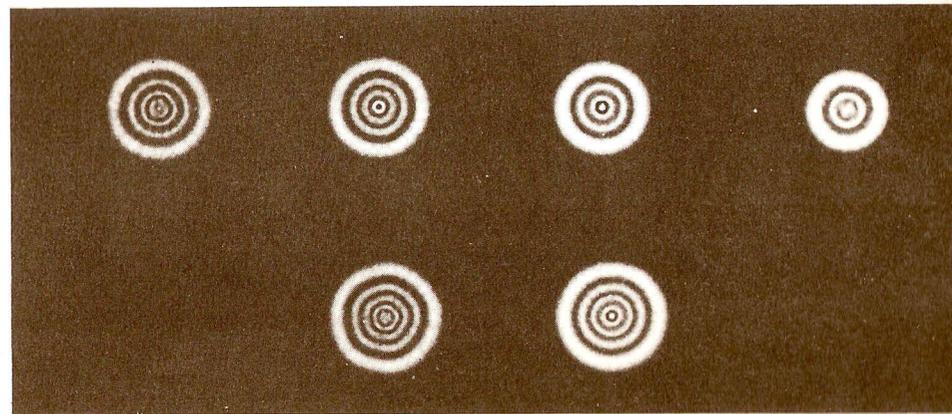


Fig. 23-29. Diagramas de difracción de Fresnel de aberturas circulares de radios diferentes.

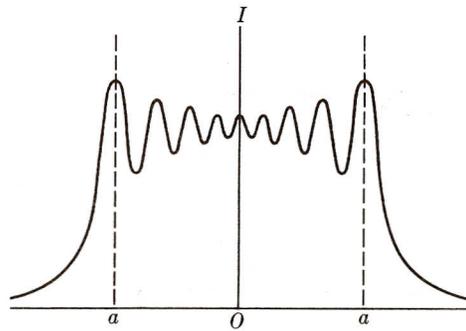


Fig. 23-30. Distribución de intensidad en la difracción de Fresnel producida por una abertura circular.

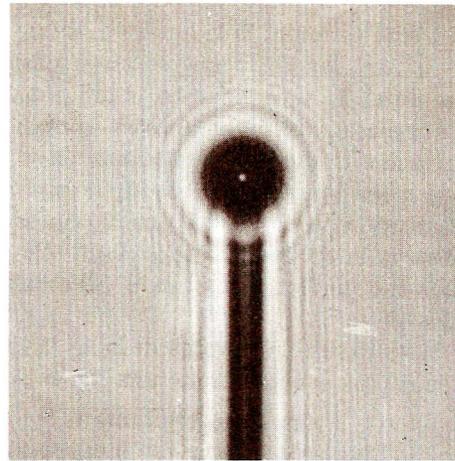


Fig. 23-31. Difracción de Fresnel producida por un pequeño disco circular sostenido por una varilla delgada.

a las diferentes posiciones P, P', P'', P''' del punto de observación, como se muestra en la fig. 23-28, con zonas centradas en Q, Q', Q'', Q''' , respectivamente. El resultado es que las diferentes zonas activas dan contribuciones diferentes al movimiento ondulatorio resultante, obteniéndose un diagrama de difracción compuesto de una serie de anillos concéntricos con P y alternadamente iluminados, como se muestra en la fig. 23-29. La fig. 23-30 muestra la distribución de intensidad en función de la distancia al eje de la abertura para una abertura circular de radio a , comprendiendo varias zonas.

Si en vez de una abertura circular tenemos un disco circular, el diagrama de difracción es similar, excepto que el centro está siempre iluminado. Esto es por-

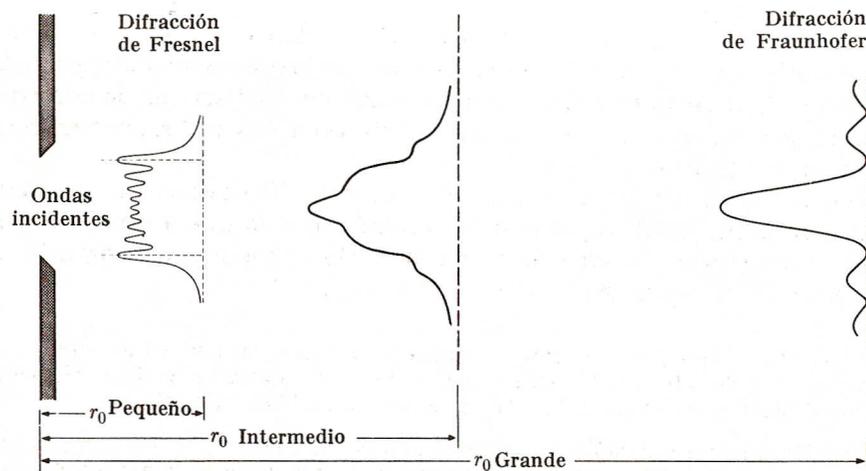


Fig. 23-32. Cambio del diagrama de difracción a medida que varía la distancia del punto a la abertura.

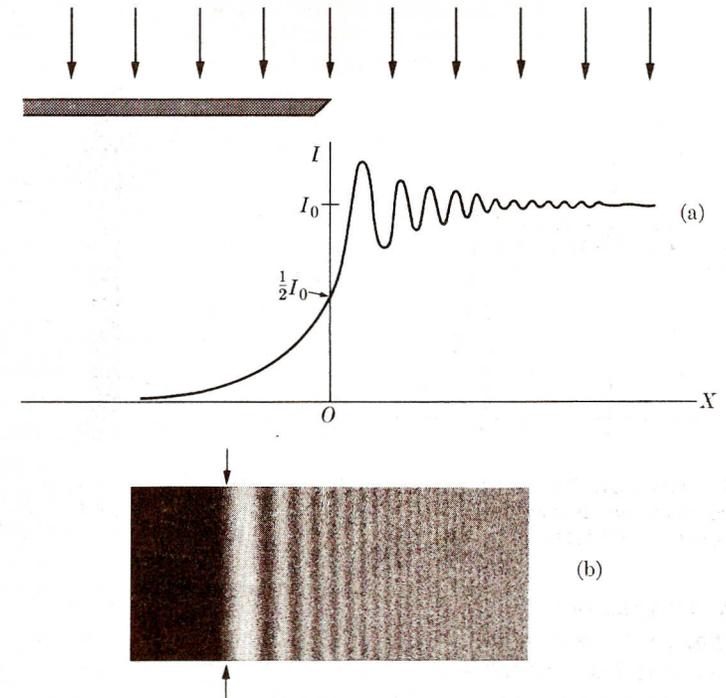


Fig. 23-33. (a) Distribución de intensidad en la difracción de Fresnel producida por un borde recto. (b) Fotografía de la difracción de Fresnel producida por un borde recto.

que la primera zona de Fresnel expuesta siempre da una contribución positiva en el centro, por la misma razón que la da en el caso de un frente de onda plano completamente expuesto (fig. 23-31).

Para una rendija rectangular la situación es muy similar a la de una abertura circular, excepto que en vez de anillos, las zonas de Fresnel son bandas paralelas a la rendija. A medida que nos alejamos de la rendija, el diagrama de difracción evoluciona gradualmente de un diagrama de Fresnel a uno de Fraunhofer, como se indica en la fig. 23-32.

En un borde, el diagrama de difracción tiene la distribución de intensidad mostrada en la fig. 23-33, cayendo la intensidad gradualmente a cero dentro de la sombra geométrica y fluctuando en un intervalo de unas pocas longitudes de onda dentro de la región geométrica de iluminación.

EJEMPLO 23.7. Una pantalla con un pequeño agujero de 1 mm de diámetro se ilumina con luz de $5,9 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda. Calcular la distancia según la perpendicular entre la pantalla y el punto de oscuridad más lejano.

Solución: En este caso el radio del agujero es $a = 0,5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$ y la longitud de onda es $\lambda = 5,9 \times 10^{-7} \text{ m}$. El punto de oscuridad más lejano es el punto para el cual la abertura abarca sólo dos zonas de Fresnel. Entonces, conforme a la ec. (23.23) con $n = 2$ y a en vez de R_n , tenemos $a^2 = 2\lambda r_0$ o sea $r_0 = a^2/2\lambda = 0,21 \text{ m}$,

lo cual significa que el punto de oscuridad más lejano está a 21 cm, aproximadamente, de la pantalla. En general, los puntos sucesivos de oscuridad están a distancias $\alpha^2/2n\lambda$ (donde n es un entero) de la pantalla.

23.7 Difusión de ondas

Hasta ahora hemos supuesto en nuestro estudio de la difracción que los objetos interpuestos en el camino de una onda juegan un papel *pasivo*. Esto es, hemos supuesto que su único papel es interrumpir una parte del frente de onda sin agregar ellos mismos ninguna onda. Con esta suposición, los efectos de difracción observados se deben exclusivamente a la distorsión del movimiento oscilatorio incidente.

Sin embargo, éste no es el cuadro real en muchas situaciones. Supongamos, por ejemplo, que se suspende en el aire una esfera de material elástico y que se produce una onda acústica o de compresión en las cercanías. Cuando la onda pasa alrededor de la esfera, experimenta en primer lugar una difracción del tipo estudiado anteriormente. Pero además la esfera elástica está sometida a deformaciones oscilatorias debidas a las fluctuaciones de presión que acompañan a la onda. Las oscilaciones de la superficie producen a su vez nuevas perturbaciones u ondas en el aire circundante; estas ondas se superponen a la onda inicial. Las nuevas ondas producidas por la esfera oscilante son ondas *difundidas* y el proceso se denomina *difusión*. (NT).

Análogamente, si se coloca una esfera conductora en el camino de una onda electromagnética, los campos eléctrico y magnético de la onda inducen oscilaciones en las cargas libres de la esfera, y estas cargas oscilantes producen, conforme a la teoría de la radiación electromagnética desarrollada en el capítulo 19, una onda electromagnética nueva o difundida.

En el capítulo 19 estudiamos la difusión por un solo electrón, lo cual es un problema puramente dinámico al nivel atómico. La difusión que estamos describiendo aquí es de naturaleza más macroscópica, ya que involucra cuerpos compuestos de muchos átomos o que contienen muchos electrones. Podemos calcular la magnitud de esta difusión macroscópica aplicando ciertas condiciones de contorno en la superficie del cuerpo; estas condiciones determinan la naturaleza de la onda difundida. Por ejemplo, en el caso de una esfera perfectamente conductora, debemos imponer que en la superficie de la esfera la componente tangencial del campo eléctrico resultante (es decir, la suma del campo eléctrico de la onda incidente y el de la difundida) sea cero.

Los procesos de difusión son extremadamente importantes en todos los fenómenos ondulatorios. Sin embargo, un estudio más completo de la difusión exige un tratamiento matemático que está más allá de los fines de este texto.

23.8 Difusión de rayos X por cristales

Las ondas electromagnéticas con longitudes de onda más cortas que la de los rayos ultravioleta, tales como los rayos X y los rayos γ , no son difractadas en forma notable por objetos de las dimensiones usadas en la región óptica. Sin

N. T.: Ver nota al pie de la página 770.

embargo, una red cristalina con átomos o moléculas regularmente espaciados a distancias del orden de 10^{-10} m, constituye un medio excelente para producir difracción de rayos X. Este problema es algo más complicado que los estudiados previamente en este capítulo por dos razones. En primer lugar, como un cristal es un arreglo tridimensional, los centros de difracción en vez de estar distribuidos en una dirección, lo están en el espacio, como se indica en la fig. 23-34, que es un diagrama de un cristal de NaCl. (Las esferas oscuras y claras corresponden a los iones Na^+ y Cl^-). En segundo lugar, bajo la acción del campo eléctrico de una onda electromagnética, los átomos o moléculas del cristal se convierten en fuentes de radiación secundarias, como ya se explicó en la sección 19.9. En consecuencia, tenemos en realidad más bien difusión que difracción.

Cuando los rayos X pasan a través del cristal, la intensidad de los rayos difundidos o difractados es el resultado de la interferencia (en la dirección de observación) de las ondas emitidas por cada átomo o molécula. Cuando el cristal está

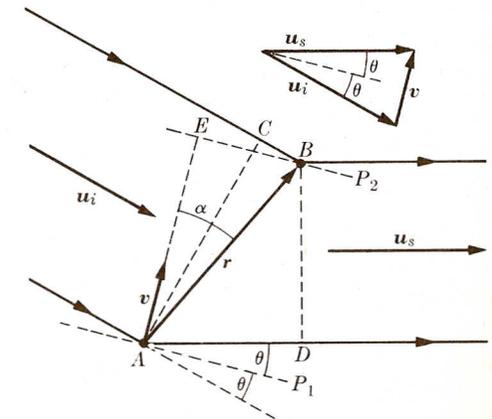
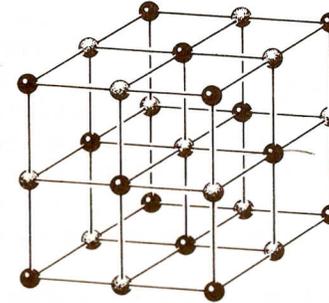


Fig. 23-34. Representación simplificada de un cristal de cloruro de sodio, mostrando la distribución regular de los átomos que forman una red cúbica.

Fig. 23-35. Difusión de rayos X por dos átomos A y B.

compuesto de más de una clase de átomos, cada una contribuye de manera diferente a la difusión de los rayos X. Para simplificar nuestro cálculo, supondremos entonces que tenemos una sola clase de átomos y sólo un átomo por celda unitaria del cristal. Los resultados tienen validez general. La corrección para cuando hay más de una clase de átomos se calcula muy simple y directamente, pero no se discutirá aquí.

Consideremos dos átomos A y B a una distancia r (fig. 23-35). Sea u_i un versor según la dirección de propagación de las ondas incidentes y u_s un versor según la dirección de las ondas difundidas. La diferencia de camino de las ondas incidente y difundida para esos dos átomos es $AD - BC$ y el desfase está dado por

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (AD - BC).$$

Pero $AD = u_s \cdot r$ y $BC = u_i \cdot r$. Por lo tanto

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (u_s - u_i) \cdot r = \frac{2\pi}{\lambda} v \cdot r, \tag{23.24}$$

donde $v = u_s - u_i$. Llamando 2θ al ángulo entre u_s y u_i vemos que, según el diagrama inserto en la fig. 23.35,

$$v = 2 \text{ sen } \theta. \tag{23.25}$$

La condición para que haya interferencia constructiva en la dirección u_s es $\delta = 2n\pi$ o sea, en vista de la ec. (23.24),

$$v \cdot r = n\lambda, \tag{23.26}$$

donde n es, como en casos anteriores, un entero positivo o negativo. La ec. (23.26) representa un plano perpendicular al vector v (ver ejemplo 3.11). Por lo tanto, para una longitud de onda y una dirección de incidencia dadas, la ec. (23.26) da una serie de planos paralelos, uno para cada valor de n . La fig. 23-35 muestra dos de esos planos: P_1 y P_2 . La condición (23.26) vale para todos los átomos ubicados sobre estos planos, contribuyendo todos a un máximo de intensidad en la dirección u_s . En la ec. (23.26), $n = 0$ corresponde al plano que pasa por A , $n = \pm 1$ a los planos más cercanos a cada lado, $n = \pm 2$ al siguiente par de planos y así sucesivamente.

De la fig. 23-35 deducimos, usando la ec. (23.35), que $v \cdot r = vr \cos \alpha = 2d \text{ sen } \theta$, donde $d = AE = r \cos \alpha$ es la distancia entre los planos P_1 y P_2 . La ec. (23.26) se convierte entonces en

$$2d \text{ sen } \theta = n\lambda, \tag{23.27}$$

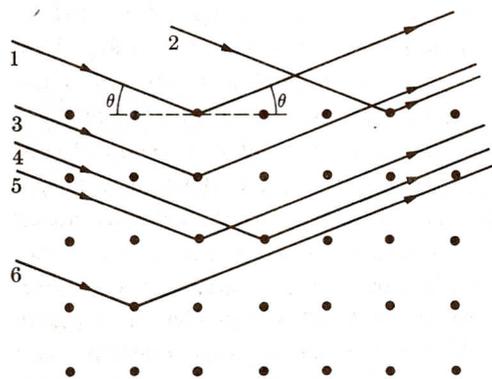


Fig. 23-36. Planos difusores paralelos en un cristal.

expresión que se conoce como *condición de Bragg*. Los valores de n están limitados por la condición de que $\text{sen } \theta$ debe ser menor que la unidad. En la fig. 23-36 se muestra la geometría implicada en esta ecuación. Para los rayos tales como el 1 y el 2 que son difundidos por átomos ubicados en el mismo plano, el desfase es nulo ($n = 0$) e interfieren constructivamente. Esto ocurre sin embargo para cualquier ángulo de incidencia. El hecho importante que implica la condición de Bragg es que los rayos tales como 3, 4, 5, ..., que provienen de planos sucesivos, también interfieren cons-

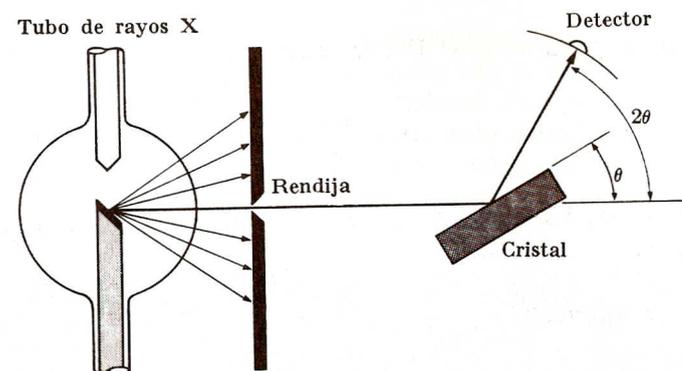


Fig. 23-37. Espectrómetro de cristal para la difracción de rayos X. Los rayos X, generados en el tubo de la izquierda y colimados por una rendija en un bloque de plomo, se difractan en el cristal. Los rayos X difractados se observan por medio de un detector móvil, en general una cámara de iones.

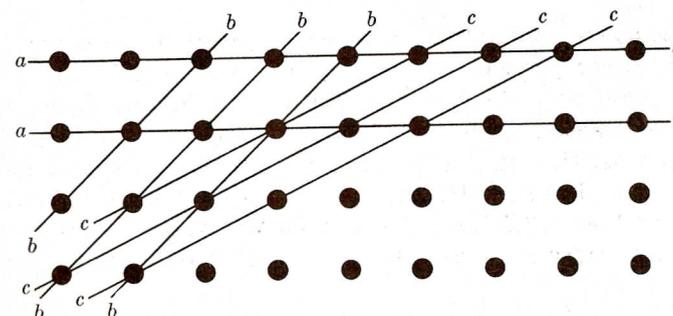


Fig. 23-38. Varios planos difusores paralelos posibles en un cristal.

trictivamente, dando lugar a un máximo muy intenso. En consecuencia, la condición de Bragg expresa una especie de efecto colectivo, en el cual los rayos difundidos por todos los átomos ubicados en determinados planos paralelos interfieren constructivamente. Para planos fijos (o d fija) y longitud de onda λ

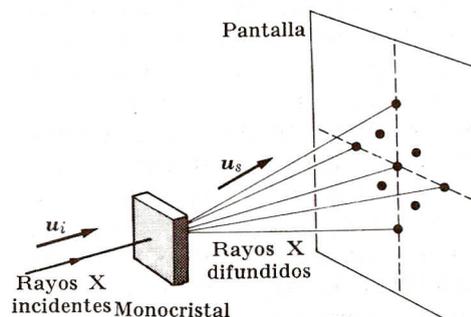


Fig. 23-39. Difracción de Laue de rayos X producida por un monocristal.

dada se producen, al variar el ángulo θ , posiciones alternadas de intensidad máxima y mínima, correspondientes a interferencia constructiva especificada por la ec. (23.27) o destructiva. Nótese que la ec. (23.27) se puede usar para medir la separación d de los planos si se conoce la longitud de onda λ y viceversa. En la fig. 23-37 se muestra un esquema de la disposición experimental para observar la difusión Bragg de rayos X; este dispositivo se denomina *espectrómetro de cristal*.

Dada una dirección de incidencia u_i , la ec. (23.26) define una serie de posibles familias de planos paralelos que producen un máximo para la difusión en la dirección u_s , característica de cada familia. La intensidad depende del número de átomos que hay en cada familia de planos. La fig. 23-38 muestra algunas de las familias posibles de planos. Cada plano corresponde a una densidad de centros difusores y a un espaciado diferentes. Si se intercala una pantalla en el camino de los rayos difundidos por un monocristal (ver fig. 23-39), aparece un diagrama regu-



Fig. 23-40. Diagrama de Laue de difracción para un cristal de cuarzo. Se ha intentado disimular el efecto del haz incidente no desviado.

lar característico de la estructura del cristal. Se llama *diagrama de Laue*. Cada punto del diagrama corresponde a la dirección de u_s , relacionada con las diferentes familias de planos ilustrados en la fig. 23-38. La fotografía de la fig. 23-40 muestra un diagrama de Laue.

Si en vez de un monocristal, el difusor es un polvo que contiene un gran número de cristales pequeños orientados al azar, los correspondientes versores u_s yacen sobre superficies cónicas con sus respectivos ejes en la dirección de incidencia como se muestra en la fig. 23-41. Cada superficie cónica produce un anillo brillante sobre una película fotográfica como se muestra en la fig. 23-42, resultando el llamado diagrama de *Debye-Scherrer*. Analizando diagramas tales

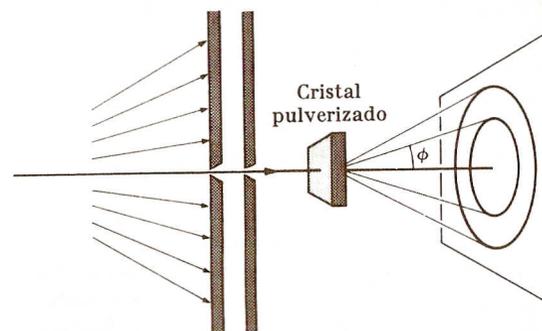


Fig. 23-41. Difracción de rayos X por polvo.

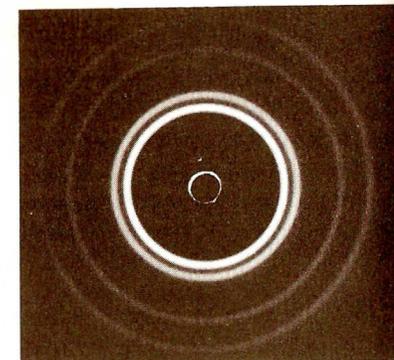


Fig. 23-42. Diagrama de difracción de rayos X para aluminio pulverizado.

como los de las figs. 23-40 y 23-42, se puede deducir la estructura interna de un cristal o, inversamente, hallar la longitud de onda de los rayos X.

Es interesante señalar que cuando Roentgen observó los rayos X por primera vez a fines del siglo diecinueve, se originó una gran discusión acerca de su naturaleza. ¿Eran ondas o partículas? Para responder esta pregunta, los físicos efectuaron experimentos de interferencia y de difusión usando aparatos similares a los empleados en experimentos sobre la luz. Existía la tendencia a descartar cualquier interpretación ondulatoria hasta que von Laue, Bragg y otros estudiaron el pasaje de rayos X a través de cristales y obtuvieron los resultados que hemos estado discutiendo, los cuales ofrecieron una prueba concluyente de la naturaleza ondulatoria de la radiación X.

EJEMPLO 23.8. Un cristal de sal gema difracta un haz de rayos X. El espectro de primer orden corresponde a un ángulo de $6^\circ 50'$ y la distancia entre los planos es $2,81 \times 10^{-10}$ m. Determinar la longitud de onda de los rayos X y la posición del espectro de segundo orden.

Solución: Utilizando la relación de Bragg (23.27) con $d = 2,81 \times 10^{-10}$ m, $\theta = 6^\circ 50'$ y $n = 1$, encontramos que

$$\lambda = 2d \sin \theta = 6,69 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

Para hallar la posición del espectro de segundo orden, hacemos $n = 2$. Entonces, $\sin \theta = n\lambda/2d = 0,238$ o sea $\theta = 13^\circ 46'$. Nótese que el orden máximo de difracción está limitado por la condición $n\lambda/2d < 1$, que en nuestro caso es $n < 8,4$ o sea $n_{\text{máx}} = 8$.

Bibliografía

1. "A Student Experiment in Fresnel Diffraction", P. Young, *Am. J. Phys.* **32**, 367 (1964)
2. "Crystals", E. Wood, *The Physics Teacher* **3**, 7 (1965)
3. "Early Studies in X-Ray Crystallography", A. Hull y C. Burdick, *Physics Today*, octubre 1958, pág. 18

4. "Undergraduate Research Project: Photon Diffraction", R. Bisser, *Am. J. Phys.* **31**, 29 (1963)
5. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. Dover Press, New York, 1963, cap. 12
6. *Fundamentos de óptica*, B. Rossi. Reverté, Barcelona, 1966, cap. 4
7. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. Holt, Rinehart and Winston, 1959, cap. 8 (Fresnel); cap. 14 (Roentgen)
8. *The Feynman Lectures on Physics*, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, vol. I, cap. 30; vol. II, cap. 30
9. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 294 (Grimaldi); pág. 318 (Fresnel); pág. 365 (Rowland)
10. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton y D. H. D. Roller. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958, secs. 30.2, 30.3 y 30.6

Problemas

23.1 Rayos paralelos de luz verde de mercurio, cuya longitud de onda es $5,6 \times 10^{-7}$ m, pasan a través de una rendija de 0,4 mm de ancho que cubre una lente de 40 cm de distancia focal. ¿Cuál es la distancia entre el máximo central y el primer mínimo sobre una pantalla colocada en el plano focal de la lente?

23.2 El diagrama de difracción de Fraunhofer de una rendija, ampliado al doble de su tamaño en la fig. 23.5, se formó sobre una película fotográfica ubicada en el plano focal de una lente de 0,60 m de distancia focal. La longitud de onda de la luz que se usó era de $5,9 \times 10^{-7}$ m. Calcular el ancho de la rendija. [Sugerencia: medir (sobre la fotografía) la distancia entre mínimos correspondientes a derecha y a izquierda del máximo central.]

23.3 Se usa un telescopio para observar dos fuentes puntuales distantes que están a 30 cm una de otra. El objetivo del telescopio está cubierto por una pantalla que tiene una rendija de 1 mm de ancho. ¿Cuál es la distancia máxima en metros a la cual se puede resolver las dos fuentes? Suponer $\lambda = 5,0 \times 10^{-7}$ m.

23.4 En el plano focal de una lente de 1 m de distancia focal, se observa el diagrama de difracción de Fraunhofer de una rendija. El ancho de la rendija es 0,4 mm. La luz incidente contiene dos longitudes de onda λ_1 y λ_2 . El cuarto

mínimo correspondiente a λ_1 y el quinto mínimo correspondiente a λ_2 coinciden a 5 mm del máximo central. Calcular λ_1 y λ_2 .

23.5 Una onda plana monocromática de longitud de onda λ incide a un ángulo de 30° sobre una pantalla plana opaca que tiene una rendija larga y angosta de ancho a (fig. 23-43). Detrás de la pantalla hay una lente convergente

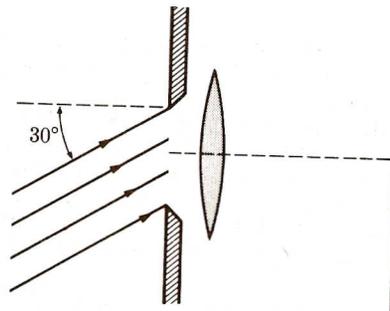


Figura 23-43

cuyo eje principal es perpendicular al plano de la pantalla. Describir el diagrama de difracción que se observa en el plano focal de esta lente.

23.6 Discutir la distribución de intensidad de la difracción de Fraunhofer por tres rendijas idénticas igualmente espaciadas. Suponer incidencia normal sobre las rendijas.

23.7 Una onda plana monocromática de $6,0 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda incide perpendicularmente sobre una pantalla opaca que tiene una abertura rectangular de $0,5 \text{ mm} \times 1,0 \text{ mm}$. (a) Describir el diagrama de difracción que se observa en el plano focal de una lente convergente de 2,0 m de distancia focal colocada directamente atrás de la abertura. (b) Hallar los lados del rectángulo formado por las líneas negras que rodean el máximo central.

23.8 En un diagrama de difracción de dos rendijas falta el tercer máximo principal porque el mismo coincide con el primer mínimo de difracción. (a) Hallar el cociente a/b . (b) Representar la distribución de intensidad abarcando varios máximos a cada lado del máximo central. (c) Hacer un esquema sombreado de las franjas tal como aparecerían sobre la pantalla.

23.9 Calcular el radio del disco central del diagrama de difracción de Fraunhofer de la imagen de una estrella formada por (a) una lente de cámara fotográfica de 2,5 cm de diámetro y 7,5 cm de distancia focal, (b) un objetivo de telescopio de 15 cm de diámetro con una distancia focal de 1,5 m. Suponer que la luz es de $5,6 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda.

23.10 Frente a una fuente brillante de luz hay dos agujeros muy pequeños a 1,5 mm uno de otro y se los mira a través de una lente cubierta por una pantalla que tiene un agujero (una abertura) central circular de 4 mm de diámetro. ¿Cuál es la distancia máxima a la cual se puede resolver los agujeritos? Suponer una longitud de onda de $5,5 \times 10^{-7}$ m.

23.11 La difracción de Fraunhofer de dos rendijas se observa en el plano focal de una lente de 50 cm de distancia focal. La luz monocromática incidente tiene una longitud de onda de $5,0 \times 10^{-7}$ m. Se encuentra que la distancia entre los dos mínimos adyacentes al máximo de orden cero es 0,5 cm y que falta el máximo de cuarto orden. Calcular el ancho de las rendijas y la distancia entre sus centros.

23.12 Los faros delanteros de un automóvil que se acerca están a 1,3 m uno

de otro. Estimar la distancia a la cual se puede resolver los dos faros a ojo desnudo si el poder resolvente del ojo está determinado sólo por la difracción. Suponer una longitud de onda media de $5,5 \times 10^{-7}$ m y que el diámetro de la pupila del ojo es 5 mm. Comparar con el resultado que se obtiene usando el poder resolvente del ojo dado en la sección 21.5.

23.13 En la fig. 23-44, dos fuentes puntuales de luz S_1 y S_2 situadas a 50 m de la lente L y a 6 mm una de otra,

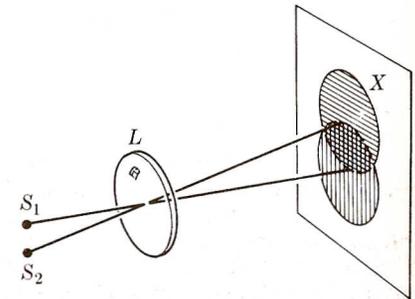


Figura 23-44

producen imágenes apenas resueltas según el criterio de Rayleigh. La distancia focal de la lente es 20 cm. ¿Cuál es el diámetro de cada uno de los primeros anillos de difracción?

23.14 Dos estrellas igualmente brillantes subtenden un ángulo de un segundo. Suponiendo una longitud de onda de $5,5 \times 10^{-7}$ m, (a) ¿cuál es el diámetro mínimo de la lente de un objetivo de telescopio para poder resolver estas estrellas? (b) ¿Cuál debiera ser el aumento del telescopio? (c) Calcular la distancia focal del ocular que se debe usar si la distancia focal del objetivo es 1,8 m.

23.15 Se puede demostrar que en el caso de la difracción de Fraunhofer, la amplitud de las ondas difractadas por una abertura circular de radio R es proporcional a la función de Bessel $J_1(x)$ (ver Chemical Rubber Company's Standard Mathematical Tables, duodécima edición, página 317), donde, para incidencia normal, $x = (2\pi R/\lambda) \sin \theta$, siendo θ el ángulo que los rayos difractados forman con el eje de la abertura (fi-

gura 23-45). (a) Demostrar que las direcciones para las cuales las ondas difractadas tienen amplitud nula corresponden a las raíces de la ecuación $J_1(x) = 0$. (b) Recurriendo a una tabla de las raíces de $J_1(x) = 0$ (loc. cit., página 318), obtener los valores de $\sin \theta$ para las tres primeras direcciones de

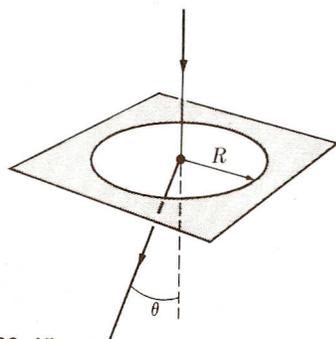


Figura 23-45

amplitud nula, verificando la ec. (23.11). (c) Suponiendo que mediante una lente de distancia focal f se enfoca los rayos difractados sobre una pantalla colocada en el plano focal de la lente, dar la expresión para el radio de los tres primeros anillos oscuros que se forman. (Notar que en este problema se puede reemplazar $\sin \theta$ por θ). (d) Obtener los valores de θ y del radio de cada uno de los anillos, si $R = 0,10$ mm, $\lambda = 5,9 \times 10^{-7}$ m y $f = 20$ cm.

23.16 A través de una abertura circular pasa luz monocromática de $6,0 \times 10^{-7}$ m proveniente de una fuente puntual distante. El diagrama de difracción de Fresnel se observa sobre una pantalla a 1 m de la abertura. Determinar el diámetro de la abertura circular si expone (a) sólo las zonas de Fresnel centrales, (b) las cuatro primeras zonas de Fresnel.

23.17 Se coloca un punto a 1,0 cm de una abertura circular iluminada con luz de $5,0 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda. Si la abertura corresponde a 10 zonas de Fresnel, determinar su radio.

23.18 Sobre una abertura circular de 0,1 mm de radio incide luz de 5×10^{-7} m. ¿A qué distancia de la abertura se debería colocar un punto para que la abertu-

tura correspondiera a (a) tres zonas de Fresnel, (b) cuatro zonas de Fresnel? Estimar en cada caso si en ese punto habrá iluminación o sombra.

23.19 Una onda luminosa plana y monocromática de longitud de onda $\lambda = 5,0 \times 10^{-7}$ m incide perpendicularmente sobre una pantalla opaca que tiene una abertura de la forma que se muestra en la fig. 23-46. El radio del círculo interior es 1 mm y el del exterior 1,41 mm. (a) Calcular la amplitud y la intensidad relativas de la perturbación óptica en un punto P sobre el eje de los círculos a 2 m de la pantalla, respecto a los valores que se obtendrían si no estuviera la pantalla. (b) Determinar la

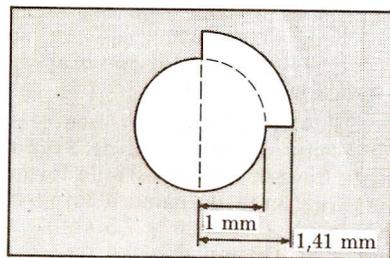


Figura 23-46

fase de esta perturbación respecto a la de la que se observaría en P sin la pantalla.

23.20 A través de una abertura circular de 2,6 mm de diámetro pasan ondas luminosas paralelas de $5,6 \times 10^{-7}$ m de longitud de onda. Se observa el diagrama de difracción de Fresnel sobre una pantalla a 1,0 m de la abertura. (a) El centro del diagrama de difracción, ¿será brillante u oscuro? (b) ¿Qué distancia mínima se debería mover la pantalla para invertir la situación encontrada en (a)?

23.21 Una onda luminosa plana y monocromática de longitud de onda $\lambda = 5,0 \times 10^{-7}$ m incide perpendicularmente sobre una pantalla que tiene una abertura circular de 0,40 cm de diámetro. (a) Determinar los puntos de intensidad máxima y mínima a lo largo del eje de la abertura. (b) ¿A qué distancia de la pantalla se presenta el último mínimo?

23.22 Una pantalla con una abertura circular de 0,40 cm de radio se ilumina con ondas luminosas planas que inciden perpendicularmente. Suponer que la luz incidente es una mezcla de dos haces monocromáticos de longitudes de onda $\lambda_1 = 6,0 \times 10^{-7}$ m y $\lambda_2 = 4,0 \times 10^{-7}$ m respectivamente. Determinar los puntos sobre la perpendicular a la abertura en su centro en los cuales se observa sólo una de las dos longitudes de onda.

23.23 Sobre una red plana de difracción por transmisión que tiene 500 líneas por mm inciden normalmente ondas planas monocromáticas de $6,0 \times 10^{-7}$ m. Determinar los ángulos de desviación para los espectros de primero, segundo y tercer orden.

23.24 Una red de difracción por transmisión tiene grabadas 4000 líneas por cm. Calcular en el espectro de segundo orden, la separación angular en grados entre las líneas α y β del hidrógeno atómico, cuyas longitudes de onda son $6,56 \times 10^{-7}$ m y $4,10 \times 10^{-7}$ m respectivamente. Suponer incidencia normal.

23.25 (a) Una red de difracción por transmisión que tiene 6000 líneas por cm desvía cierta luz en un ángulo de 20° en el primer orden; ¿cuál es la longitud de onda de la luz? (b) ¿Cuál es la desviación de esta longitud de onda en el segundo orden? Suponer incidencia normal.

23.26 ¿Cuál es la máxima longitud de onda que se puede observar en el cuarto orden con una red que tiene 5000 líneas por cm? Suponer incidencia normal.

23.27 Suponiendo que los límites del espectro visible están en las longitudes de onda 4×10^{-7} m y 7×10^{-7} m, hallar los ángulos subtendidos por los espectros de primera y segundo orden producidos por una red plana que tiene 6000 líneas por cm. Suponer incidencia normal.

23.28 Demostrar que en una red que tiene un gran número de líneas, la intensidad del primer máximo secundario a un lado o a otro del primer máximo principal es igual a alrededor de 4 % de la intensidad del máximo principal.

23.29 Una red de difracción por transmisión de 4 cm de longitud tiene 4000 lí-

neas por cm. Calcular el poder resolvente de la red para una longitud de onda de $5,9 \times 10^{-7}$ m en el espectro de primer orden. ¿Separa la red las dos líneas de $5,890 \times 10^{-7}$ m y $5,896 \times 10^{-7}$ metros de longitud de onda que constituyen el doblete amarillo del sodio? Calcular también la desviación mínima y la correspondiente dispersión de la red para la longitud de onda considerada.

23.30 Demostrar que cualquiera sea el espaciamiento de las líneas en una red, el violeta del espectro de tercer orden se superpone al rojo del espectro de segundo orden. Suponer incidencia normal.

23.31 Una red de difracción por reflexión se hace grabando, con una punta de diamante, líneas finas sobre una superficie pulida de metal (fig. 23-47). Los espacios pulidos que quedan entre líneas adyacentes son el equivalente de las

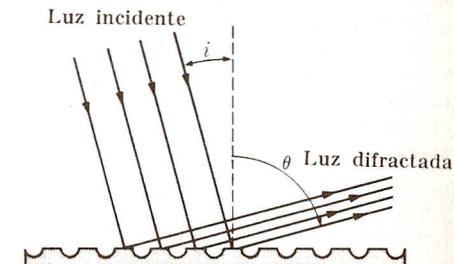


Figura 23-47

rendijas en una red de difracción por transmisión. Demostrar que los máximos principales se obtienen de la condición $a(\sin i - \sin \theta) = n\lambda$, donde a es la separación entre líneas consecutivas.

23.32 Para asegurar un enfoque apropiado en las redes de difracción, el físico norteamericano H. A. Rowland construyó redes cóncavas de gran radio. En la fig. 23.48 C es el centro de curvatura de la red y el diámetro de la circunferencia de trazos es igual al radio de la red. Demostrar que para cualquier fuente S colocada sobre esa circunferencia (a) todos los rayos llegan a la red con el mismo ángulo de incidencia, (b) todos los rayos difractados por la red con el mismo ángulo convergen en un punto O situado

en la circunferencia de trazos. De este modo, si en O se coloca una placa fotográfica tangente a la circunferencia, se puede registrar el espectro de difracción correspondiente a ese ángulo de difracción. Esta disposición se denomina *montaje de Rowland* y se usa extensamente

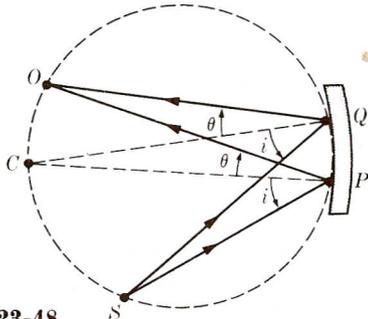


Figura 23-48

en los laboratorios de física en que se hace investigación espectroscópica. [Sugerencia: Tener en cuenta que la normal a la red en el punto de incidencia de un rayo pasa por C y que la superficie de la red se aparta muy poco de la circunferencia de trazos.]

23.33 La separación entre los planos principales de un cristal de NaCl es $2,82 \times 10^{-10}$ m. Se encuentra que una reflexión de Bragg de primer orden de un haz monocromático de rayos X ocurre a un ángulo de 10° . (a) Calcular la longitud de onda de los rayos X. (b) ¿Qué ángulo corresponde al espectro de segundo orden?

23.34 El yoduro de potasio, KI, es un cristal cúbico cuya densidad es $3,13 \text{ g cm}^{-3}$. Hallar la mínima distancia entre planos, o sea la longitud de una celda unitaria. Determinar los ángulos correspondientes a las dos primeras reflexiones de Bragg para rayos X de $3,0 \times 10^{-10}$ m de longitud de onda.

23.35 Un tubo de rayos X acelera electrones por medio de una diferencia de potencial de 10^5 V. Los rayos X producidos se examinan mediante el cristal descrito en el problema 23.33. Hallar el ángulo al cual aparece el espectro de primer orden de la longitud de onda más corta que produce el tubo.

23.36 Un haz de rayos X de 5×10^{-11} m de longitud de onda incide sobre un polvo formado por cristales microscópicos de KCl orientados al azar. El espaciamiento de la red cristalina es $3,14 \times 10^{-10}$ m. Se coloca una película fotográfica a 0,1 m del blanco de polvo. (a) Hallar el radio de las circunferencias correspondientes a los espectros de primero y segundo orden provenientes de planos que tienen el mismo espaciamiento que la red. (b) Determinar el radio de las circunferencias que resultan de planos que forman un ángulo de 45° con los de (a).

23.37 Una red cristalina se puede caracterizar por tres vectores fundamentales \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 y \mathbf{a}_3 , de modo que la estructura del cristal es periódica para desplazamientos que son combinaciones lineales de múltiplos enteros de esos tres vectores (fig. 23-49). (a) Demostrar que el vector de posición relativa de dos puntos que ocupan posiciones similares en dos celdas diferentes está dado por $\mathbf{r} = \gamma_1 \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2 + \gamma_3 \mathbf{a}_3$, donde γ_1 , γ_2 y γ_3

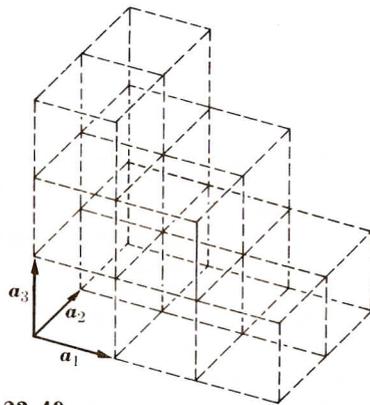


Figura 23-49

son enteros negativos o positivos. (b) Demostrar que los átomos que participan en el espectro de difracción de orden n de rayos X están dados por los enteros que satisfacen la ecuación $\mathbf{v} \cdot (\gamma_1 \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2 + \gamma_3 \mathbf{a}_3) = n\lambda$, donde \mathbf{v} está definido en la ec. (23.24). (c) Demostrar que la intensidad de la radiación difundida en la dirección asociada con \mathbf{v} es proporcional a $(A_1 A_2 A_3)^2$, donde $A_i = \frac{\sin(N_i \pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i / \lambda)}{\sin \pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i / \lambda}$ y N_i es el número de celdas del cristal en la

dirección \mathbf{a}_i . (d) A partir del resultado obtenido en (c), demostrar que los máximos principales aparecen en una dirección que satisface las relaciones $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1 = n_1 \lambda$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2 = n_2 \lambda$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3 = n_3 \lambda$, donde n_1 , n_2 y n_3 son enteros. Estas se denominan *ecuaciones de Laue*. (e) Empleando los vectores recíprocos \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 ,

\mathbf{a}^3 (ver problema 3.29), demostrar que

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_i + (n_1 \mathbf{a}^1 + n_2 \mathbf{a}^2 + n_3 \mathbf{a}^3) \lambda.$$

Esta ecuación determina la posición de los puntos brillantes en un diagrama de Laue como el que se muestra en la figura 23-40.